

UNIVERSITÀ DEL PIEMONTE ORIENTALE
DIPARTIMENTO DI GIURISPRUDENZA E SCIENZE
POLITICHE, ECONOMICHE E SOCIALI

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN ECONOMIA,
MANAGEMENT E ISTITUZIONI

TESI DI LAUREA

Modelli econometrici per la volatilità dei rendimenti finanziari

Relatore:

Chiar.mo Prof. Paolo Chirico

Correlatrice:

Chiar.ma Prof.ssa Anna Menozzi

Candidato:

Davide Ornati

ANNO ACCADEMICO 2022/2023

INDICE

INTRODUZIONE

CAPITOLO 1 - LA VOLATILITÀ

1.1 CHE COS'È LA VOLATILITÀ

1.2 COS'È LA VOLATILITÀ DAL PUNTO DI VISTA FINANZIARIO?

1.3 IL SIGNIFICATO MATEMATICO DELLA VOLATILITÀ

1.3.1 VOLATILITÀ STORICA

1.3.2 DEFINIZIONE

1.3.3 VOLATILITÀ IMPLICITA

1.3.4 LA VOLATILITÀ SECONDO JOHN C. HULL

CAPITOLO 2 – LE SERIE STORICHE E “STYLIZED FACTS”

2.1 COSA SONO LE SERIE STORICHE?

2.2 CARATTERISTICHE DELLE SERIE STORICHE FINANZIARIE: I FATTI STILIZZATI

2.2.1 LA VARIANZA

2.2.2 ASSENZA DI AUTOCORRELAZIONI

2.2.3 LA DISTRIBUZIONE: LE HEAVY TAILS

2.2.4 VOLATILITY CLUSTERING E NON STAZIONARIETÀ

2.2.5 GLI EFFETTI CALENDARIO

2.2.6 L'EFFETTO LEVA

2.2.7 LA CORRELAZIONE TRA VOLUME E VOLATILITÀ

CAPITOLO 3 – I MODELLI ECONOMETRICI: ARCH E GARCH

3.1 IL MODELLO ARCH DI ENGLE

3.1.1 PROPRIETÀ DEL MODELLO: TEORIA

3.1.2 PROPRIETÀ DEL MODELLO: SVOLGIMENTO MATEMATICO

3.1.3 VANTAGGI E SVANTAGGI DEL MODELLO

3.2 IL MODELLO GARCH DI BOLLERSLEV

3.3 I MODELLI CON ASIMMETRIA

3.3.1 IL MODELLO GARCH INTEGRATO (IGARCH)

3.3.2 IL MODELLO EXPONENTIAL GARCH (E – GARCH)

3.3.3 IL MODELLO GARCH – IN – MEAN (GARCH – M)

CAPITOLO 4 – CASO STUDIO: LA VOLATILITÀ NEI TASSI DI CAMBIO DURANTE I PERIODI DI CRISI INTERNAZIONALI

4.1 IL CAMBIO EURO – DOLLARO

4.2 IL CAMBIO DOLLARO – RUBLO

BIBLIOGRAFIA

SITOGRAFIA

INTRODUZIONE

Nel seguente elaborato vorrei arrivare a dimostrare se effettivamente i tassi di cambio delle valute subiscono variazioni durante periodi particolari, come i periodi di crisi internazionali (nello specifico il caso dell'invasione russa in Ucraina) e se effettivamente queste oscillazioni di prezzo siano dettate dallo shock causato dalla crisi. Per fare ciò ho raccolto i dati di varie valute (Dollaro, Euro, Sterlina, Franco Svizzero e Rublo) a partire dall'inizio del 2021 fino al 10/11/2023, giorno dell'inizio di questo elaborato e, successivamente, ho inserito il valore di questi tassi di cambio sotto forma di serie storica all'interno del software econometrico Gretl, il quale permette di utilizzare modelli econometrici per stimare e calcolare la volatilità di serie storiche finanziarie o dati panel. Questo lavoro si può suddividere tranquillamente in due parti: la prima parte sarà prettamente teorica e riguarderà i primi 3 capitoli; la seconda parte sarà la dimostrazione del caso studio citato precedentemente, ovvero i dati raccolti durante questo periodo di tempo, inseriti nel software Gretl per vedere effettivamente a cosa siano dovute le oscillazioni dei valori. Nella parte teorica andrò a definire e ad analizzare la volatilità nel suo complesso e nelle sue varianti (storica e implicita); andrò a descrivere le serie storiche, che cosa sono e le principali caratteristiche comuni a tutte le serie storiche finanziarie (i cosiddetti fatti empirici stilizzati) per poi passare alla descrizione dei fatti empirici stilizzati della volatilità; per ultimo, ma non per importanza, descriverò ed analizzerò i vari modelli econometrici che permettono di studiare e capire la volatilità nelle serie storiche, cercando di rimanere il più coerente possibile con il metodo di lavoro che ho utilizzato nel software Gretl.

CAPITOLO 1: LA VOLATILITÀ DEI RENDIMENTI FINANZIARI

1.1 - CHE COS'È LA VOLATILITÀ?

La volatilità è una misura statistica della dispersione dei rendimenti di un asset finanziario o di un mercato nel corso del tempo e rappresenta la variabilità o l'ampiezza delle fluttuazioni dei prezzi. Un'alta volatilità indica un grado elevato di incertezza e rischio, mentre una bassa volatilità suggerisce un ambiente di mercato più stabile e prevedibile. Nell'ambito finanziario viene misurata come deviazione standard dei rendimenti. I modelli econometrici, come quelli ARCH/GARCH, sono utilizzati per modellare la volatilità e prevedere come essa possa variare nel tempo.

In generale, la volatilità è una componente fondamentale nell'analisi del rischio e nella gestione degli investimenti. Gli investitori e gli operatori di mercato tengono conto della volatilità per valutare il potenziale rendimento e il rischio associato a determinati investimenti o strategie di trading.

1.2- COS'È LA VOLATILITÀ DAL PUNTO DI VISTA FINANZIARIO?

Dal punto di vista finanziario, la volatilità è una misura della variabilità dei rendimenti di un asset o di un portafoglio di investimenti nel tempo: indica quanto i prezzi degli strumenti finanziari fluttuano o cambiano nel corso di un periodo specifico. La volatilità è spesso espressa come deviazione standard o come percentuale.

Un'alta volatilità suggerisce che gli investimenti sono soggetti a notevoli fluttuazioni di prezzo nel breve termine, indicando un maggiore livello di rischio. D'altra parte, una bassa volatilità suggerisce una maggiore stabilità e una minore probabilità di grandi variazioni nei prezzi.

Gli investitori utilizzano la misura della volatilità per valutare il livello di rischio associato a un particolare investimento e per prendere decisioni informate sulla gestione del portafoglio. Inoltre, la volatilità è un elemento chiave nella determinazione dei prezzi delle opzioni finanziarie, influenzando la loro valore di mercato.

1.3 - IL SIGNIFICATO MATEMATICO DELLA VOLATILITÀ

In matematica finanziaria, la volatilità è una misura della variabilità dei rendimenti di un investimento. Può essere interpretata come una misura della "agitazione" o dell'"incertezza" del prezzo di un bene finanziario nel tempo.

Esistono due tipi principali di volatilità: la *volatilità storica* e la *volatilità implicita*.

1.3.1 - VOLATILITÀ STORICA

La volatilità storica è “una misura della escursione dei prezzi di una attività finanziaria in un lasso di tempo fissato”¹, ed è tipicamente calcolata ed usata dagli analisti tecnici. In economia, l'analisi tecnica (AT) è lo studio dell'andamento dei prezzi dei mercati finanziari nel tempo: prevedere trend futuri, tramite metodi statistici e grafici. Riguarda quella teoria di analisi secondo cui “è possibile prevedere l'andamento futuro del prezzo di un bene quotato, studiando la sua storia passata”². Come dice appunto la parola “volatilità storica”, è sulla storia passata che si basa l'analisi tecnica. Le turbolenze sui mercati finanziari causano instabilità dei prezzi e questi movimenti improvvisi provocano importanti oscillazioni di prezzo, che rendono difficile il controllo da parte dell'investitore. Per capire a pieno il concetto di volatilità storica si deve porre l'attenzione su un aspetto di fondamentale importanza nella operatività sui mercati: il concetto di rischio. Esiste una stretta relazione tra il rischio di un investimento e il rendimento atteso dallo stesso, tant'è che un investimento più è rischioso di un altro, più è conveniente solo se esiste un cospicuo extra rendimento rispetto a quello meno rischioso. Più semplicemente: maggiore pericolosità dell'investimento lo rende attrattivo all'investitore solo se c'è la possibilità di un maggior guadagno futuro. Esistono numerosi metodi di valutazione del rischio ed il più comune e conosciuto è espresso attraverso il vocabolo “volatilità”.

1.3.2 – DEFINIZIONE

“La volatilità storica è un indicatore statistico che misura la velocità con cui oscilla una funzione (prezzo di una attività finanziaria) rispetto al suo valore di riferimento medio. Tale grandezza è una misura della instabilità dei prezzi e quindi del rischio. Quindi per volatilità storica si intende la dispersione dei prezzi intorno ad un prezzo medio, definito il periodo di osservazione (escursione del sottostante nel tempo considerato). La volatilità storica è la volatilità calcolata sui corsi passati dell'attività finanziaria”³. Per questo motivo, considera poco gli eventi recenti (è poco reattiva), e per questo può dare “una cattiva approssimazione del rischio assunto, rappresentandone il valore passato piuttosto che quello futuro”⁴.

Viene calcolata utilizzando i dati storici dei prezzi dell'asset. In genere, si utilizza la deviazione standard dei rendimenti giornalieri o dei logaritmi dei rendimenti giornalieri nel calcolo. La formula può essere espressa come:

$$\text{Volatilità storica} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (R_i - \bar{R})^2}$$

¹ [La-volatilità-storica-Vs-la-Volatilità-implicita.pdf \(ftinvestment.it\)](#)

² [La-volatilità-storica-Vs-la-Volatilità-implicita.pdf \(ftinvestment.it\)](#)

³ [La-volatilità-storica-Vs-la-Volatilità-implicita.pdf \(ftinvestment.it\)](#)

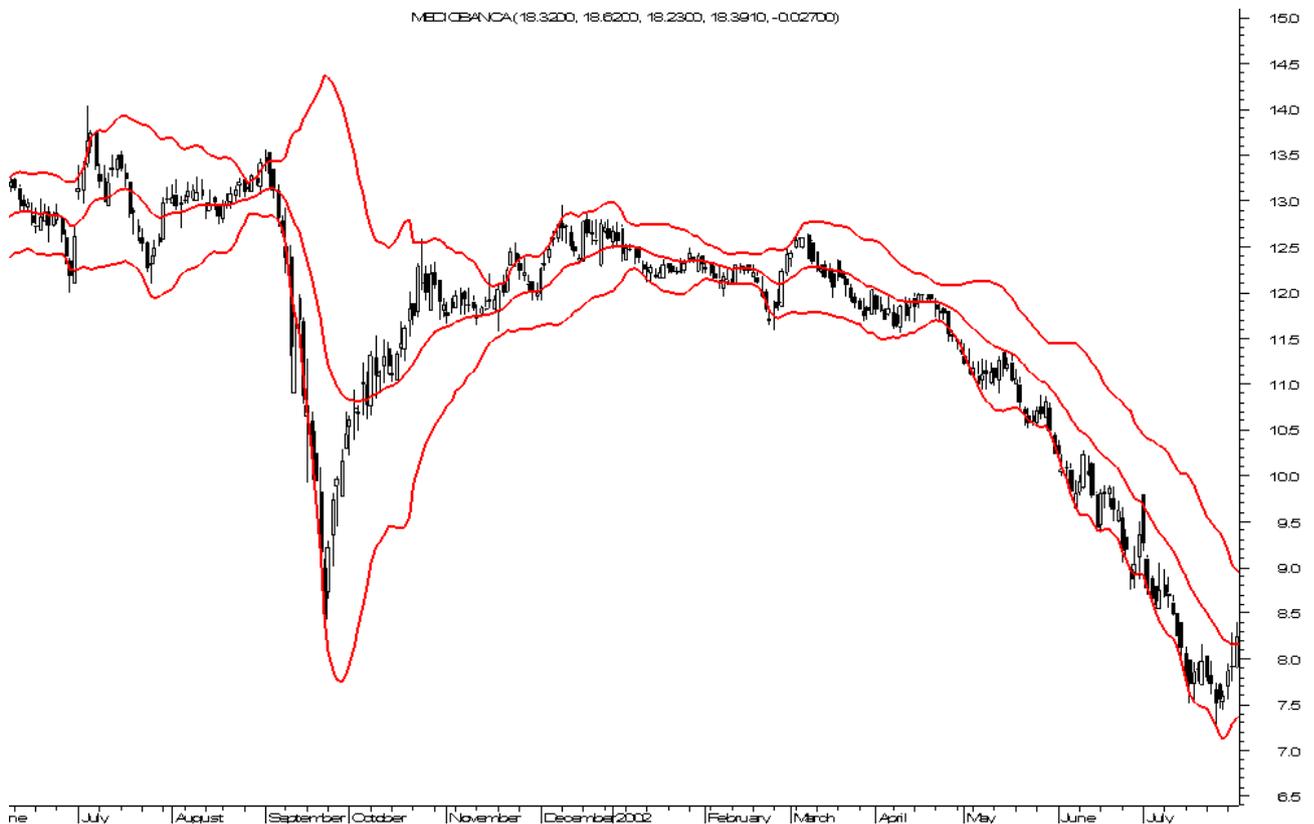
⁴ [La-volatilità-storica-Vs-la-Volatilità-implicita.pdf \(ftinvestment.it\)](#)

Dove:

- **N** è il numero di osservazioni (giorni nel nostro caso),
- **R_i** è il rendimento giornaliero all'istante (i),
- **R** è la media dei rendimenti giornalieri.

Un valore più elevato di volatilità storica indica una maggiore variabilità dei prezzi nel passato.

Un esempio pratico di volatilità storica è quella evidenziata dalle famosissime bande di Bollinger. Si collocano le bande a due deviazioni standard al di sopra ed al di sotto del prezzo medio (solitamente è a 20 periodi): con due deviazioni standard si ha una possibilità pari al 95% che i dati sui prezzi saranno compresi all'interno delle due bande. “Le bande sono una misura della volatilità storica in quanto indicano la dispersione dei prezzi rispetto ad un prezzo medio (media mobile). Le bande di Bollinger sono usate dai trader per capire quando la dispersione dei prezzi rispetto alla media sta aumentando. Il trader che osserverà le bande diventare divergenti, penserà di acquistare sottostante o venderlo a seconda che i prezzi stiano attraversando la banda superiore o inferiore”⁵.



1.3.3 - VOLATILITÀ IMPLICITA:

“La volatilità implicita è una stima della volatilità futura del sottostante ed è una misura delle aspettative degli operatori circa la variabilità futura dello strumento considerato”⁶. È

⁵ [La-volatilità-storica-Vs-la-Volatilità-implicita.pdf \(ftinvestment.it\)](#)

⁶ [La-volatilità-storica-Vs-la-Volatilità-implicita.pdf \(ftinvestment.it\)](#)

fondamentale per il calcolo del prezzo delle opzioni poiché, visto che operano sul futuro, sono fortemente influenzate dal livello di informazioni che possono arrivare e che arrivano sui mercati. “La volatilità implicita rappresenta per le opzioni ciò che il prezzo è per le azioni, tant’è che i trader in opzioni ragionano ed operano in funzione di essa”⁷. Si può affermare che la volatilità implicita è una rappresentazione della misura dell’incertezza sul comportamento futuro del sottostante. Per questo motivo la volatilità implicita è un indicatore di sentiment: un aumento fa percepire agli operatori un maggiore rischio e anticipa un violento movimento del mercato; mentre una bassa volatilità implicita rappresenta uno scenario di crescita dei prezzi, e quindi un minor rischio dell’attività sottostante.

1.3.3 – LA VOLATILITÀ SECONDO JOHN C. HULL

John C. Hull è un autore di riferimento nel campo delle finanze e dei derivati finanziari, ed è noto per il suo libro "Options, Futures, and Other Derivatives". Nel suo libro, Hull affronta il concetto di volatilità nel contesto della valutazione di opzioni e derivati finanziari.

L’autore spiega i concetti di volatilità storica e volatilità implicita, conia lo “smile” della volatilità; discute su come gli operatori finanziari utilizzano la volatilità per sviluppare strategie di trading e come gestire il portafoglio ed i rischi del mercato. Inoltre, Hull approfondisce il famoso modello di valutazione delle opzioni, il modello di Black-Scholes, e mostra come applicarlo per valutare opzioni e comprendere la sensibilità dei prezzi alle variazioni dei parametri.

Nel contesto di "Options, Futures, and Other Derivatives" di John C. Hull, la volatilità storica è trattata come una misura della variabilità dei rendimenti basata sui dati storici dell’asset sottostante. Hull fornisce una spiegazione dettagliata su come calcolare la volatilità storica utilizzando la deviazione standard dei rendimenti giornalieri o dei logaritmi dei rendimenti giornalieri.

Il calcolo della volatilità storica secondo Hull può essere rappresentato dalla seguente formula, dove (N) è il numero di osservazioni (giorni nel nostro caso), (R_i) è il rendimento giornaliero all’istante (i), e (\bar{R}) è la media dei rendimenti giornalieri:

$$\text{Volatilità storica} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (R_i - \bar{R})^2}$$

In questa formula, si calcola la differenza tra ciascun rendimento giornaliero e la media dei rendimenti giornalieri, si eleva al quadrato ciascuna di queste differenze, si sommano tutti i quadrati, si divide per il numero di osservazioni meno uno, e infine si prende la radice quadrata del risultato.

Hull spiega che un valore più elevato di volatilità storica indica una maggiore variabilità dei prezzi nel passato. Questo concetto è fondamentale per gli operatori e gli investitori che vogliono valutare il rischio storico associato a un particolare asset o strumento finanziario derivato.

La volatilità implicita è un concetto cruciale che Hull tratta nel contesto della valutazione delle opzioni finanziarie utilizzando il modello di Black-Scholes.

⁷ [La-volatilità-storica-Vs-la-Volatilità-implicita.pdf \(ftinvestment.it\)](#)

La volatilità implicita rappresenta il livello di volatilità atteso dal mercato in futuro, basato sui prezzi correnti delle opzioni finanziarie. È il parametro di volatilità che, inserito nel modello di Black-Scholes, renderebbe giustificati i prezzi di mercato osservati delle opzioni. È considerata un indicatore delle aspettative del mercato sulla futura volatilità dell'asset sottostante. Un aumento della volatilità implicita può riflettere un aumento dell'incertezza o delle aspettative di movimenti di prezzo più significativi: Hull collega la volatilità implicita alle strategie di trading, poiché i trader possono sfruttare le discrepanze tra la volatilità implicita e la volatilità storica per identificare opportunità di trading.

Il modello di Black-Scholes utilizza la volatilità implicita come uno degli input chiave: questa volatilità serve per stimare il prezzo di un'opzione e gli operatori possono dedurre la volatilità implicita osservando i prezzi di mercato delle opzioni.

La trattazione di Hull sulla volatilità implicita fornisce agli operatori e agli investitori uno strumento essenziale per valutare le aspettative di mercato e prendere decisioni informate riguardo alle opzioni finanziarie. La volatilità implicita è un elemento chiave nell'analisi e nella gestione del rischio nel contesto degli strumenti derivati.

CAPITOLO 2 – SERIE STORICHE E “STYLIZED FACTS”

INTRODUZIONE

Dopo aver analizzato e spiegato la volatilità nel suo complesso, in questo capitolo andrò a fare una premessa sulle serie storiche finanziarie, analizzare da quali caratteristiche vengono contraddistinte e quali sono i principali fatti stilizzati, cioè quelle evidenze empiriche che, anche tramite differenti strumenti di analisi, mercati o archi temporali, sono considerati importanti in ogni corrente di pensiero. Questo lavoro è necessario per poter poi analizzare e commentare i vari modelli econometrici che danno la possibilità di calcolare la volatilità nei rendimenti finanziari.

2.1 COSA SONO LE SERIE STORICHE?

La serie storica è definita come “la successione dei valori registrati ad intervalli di tempo di una variabile rappresentativa di un determinato fenomeno”⁸: le serie finanziarie descrivono la successione dei prezzi di un certo strumento finanziario. L’intervallo di tempo tra due osservazioni consecutive τ può rimanere invariato all’interno della stessa serie e può essere considerato come giornaliero, mensile, annuale oppure può variare, come nelle serie storiche finanziarie ad alta frequenza. L’intervallo dà vita ad un ordine cronologico dei valori registrati e le realizzazioni delle variabili vengono indicizzate, “attribuendo significato ad ogni valore in relazione ai valori precedenti e successivi”⁹.

Le serie storiche vengono studiate sia per interpretare un fenomeno, individuando componenti di trend, di ciclicità, di stagionalità e/o di accidentalità, sia per prevedere il suo andamento futuro. (1)

In generale, per serie si intende la classificazione di diverse osservazioni di un fenomeno rispetto ad un carattere qualitativo. Se tale carattere è il tempo, la serie viene detta storica o temporale. Il fenomeno osservato è chiamato variabile e può essere osservato in dati istanti di tempo (variabile di stato) o alla fine di periodi di lunghezza definita (variabili di flusso).

Indicando con Y il fenomeno, si indica con Y_t un’unità di osservazione al tempo t , con t un intero che varia da 1 a T , dove T è il numero complessivo degli intervalli o dei periodi temporali considerati. Una serie storica, con lunghezza T è così espressa:

⁸ Volatility clustering nelle serie storiche economiche e finanziarie, Elena Gasparini

⁹ Volatility clustering nelle serie storiche economiche e finanziarie, Elena Gasparini

$$Y_t = \{Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_T\}$$

Nelle serie storiche si parte dalla supposizione che esistano n osservazioni provenienti da altrettante variabili casuali dipendenti (l'opposto di ciò che succede nella statistica classica). L'inferenza sulla serie storica si configura come “un procedimento che tenta di riportare la serie storica al suo processo generatore”. (2)

Consideriamo una serie storica che rappresenta i prezzi di chiusura giornalieri dei valori dei tassi di cambio di un periodo di un anno. Supponiamo che ogni punto dati rappresenti il prezzo di chiusura alla fine di una giornata di borsa.

DATA	Eur_Usd	Eur_Gbp
2021-01-04	1,2296	0,90160
2021-01-05	1,2271	0,90333
2021-01-06	1,2338	0,90635

In questo esempio, la "Data" rappresenta la data in cui sono stati registrati i prezzi di chiusura, e "Eur_Usd" e "Eur_Gbp" è il valore del cambio euro – Dollaro ed Euro – Sterlina al termine della giornata. La serie storica è un insieme di dati temporali che riflettono l'andamento dei prezzi delle azioni nel corso del tempo. Questa serie storica potrebbe essere utilizzata per analizzare le tendenze dei prezzi nel tempo, calcolare la volatilità giornaliera o elaborare modelli predittivi basati sui dati storici. Le serie storiche sono fondamentali in analisi finanziarie, economiche e statistiche per comprendere il comportamento passato e fare previsioni future.

Se le serie storiche sono fondamentali per comprendere il comportamento passato e fare previsioni future, e quindi capire come attuare nel miglior modo possibile scelte di portafoglio, Markowitz afferma che «i parametri fondamentali per operare scelte di portafoglio consapevoli sono *media e varianza*»¹⁰: studiando le caratteristiche statistiche delle serie storiche e rendendole note sarà possibile scegliere il modello econometrico che meglio le descrive per poterne prevedere il comportamento futuro.

Rama Cont, nel 2001, all'interno dell'articolo “Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues” scrive che nella maggior parte dei giornali finanziari, “l'analisi di mercato è *event – based approach*”¹⁰ cioè, cerca di spiegare un movimento di mercato collegandolo ad un evento politico – economico o ad un annuncio. Su questa base è normale affermare che diversi asset non sono obbligatoriamente influenzati dagli stessi eventi o informazioni e le serie di prezzi ottenute da asset differenti e da mercati differenti mostreranno proprietà diverse. Tuttavia, Cont afferma che “le variazioni apparentemente casuali dei prezzi degli asset condividono alcune proprietà statistiche piuttosto non banali. Tali proprietà, comuni a una vasta gamma di strumenti, mercati e periodi di tempo, vengono chiamate *fatti empirici*

¹⁰ Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues. Quantitative Finance, 1, 223–236, Rama Cont (2001)

stilizzati.¹¹ Queste caratteristiche sono chiamate "stilizzate" perché rappresentano astrazioni o semplificazioni della realtà che aiutano a catturare modelli ricorrenti o comportamenti tipici. “Non sono dettagli precisi, ma piuttosto tendenze o regolarità generali che si verificano spesso in una varietà di contesti finanziari: vengono ottenuti individuando un denominatore comune tra le proprietà osservate negli studi di diversi mercati e strumenti. Così facendo si guadagna in generalità ma si tende a perdere in precisione delle affermazioni che si possono fare sui rendimenti degli asset”¹². Generalmente, i fatti stilizzati, sono formulati in termini di proprietà qualitative dei rendimenti degli asset e potrebbero non essere abbastanza precisi per distinguere tra diversi modelli parametrici.

2.2 CARATTERISTICHE DELLE SERIE STORICHE FINANZIARIE: I FATTI STILIZZATI

2.2.1 LA VARIANZA

“La varianza di una serie finanziaria è un parametro fondamentale nella determinazione del portafoglio ottimo dell'investitore”¹³: quando si arriva alla decisione del portafoglio ottimo occorre trovare il giusto compromesso tra il rendimento medio atteso e la rischiosità, misurata dalla varianza. Accettare l'ipotesi di **omoschedasticità** (“una serie storica è omoschedastica se presenta varianza costante nel tempo”¹⁴) significa introdurre nell'analisi della serie un elemento fortemente distorto nella stima dei parametri dei modelli econometrici e dei relativi test. Le analisi empiriche mostrano, infatti, che grandissima parte delle serie finanziarie è caratterizzata da **eteroschedasticità** (una serie storica è eteroschedastica se presenta una varianza non costante).

2.2.2 ASSENZA DI AUTOCORRELAZIONI

Nell'analisi statistica delle serie finanziarie l'attenzione è rivolta alle variazioni dei prezzi (ai rendimenti), essendo non stazionari (lo si può notare osservando i grafici delle funzioni di autocorrelazione). L'indipendenza lineare indica che il cambiamento del prezzo al tempo T è indipendente dalle sequenze dei cambiamenti precedenti e, per questo, non è possibile usare la conoscenza del passato per prevedere il comportamento della serie. “La serie dei prezzi è influenzata dalle informazioni e notizie derivanti dall'economia e dalla politica, queste generano un rumore che porta ad un cambiamento del valore intrinseco dello strumento finanziario”¹⁵. L'aggiustamento del prezzo successivo alle nuove informazioni non avviene subito e consiste in un sovrapprezzo seguito da un aggiustamento al ribasso. Per spiegare meglio l'assenza di autocorrelazioni, vorrei utilizzare le parole di Elena Gasparini, dove spiega che: <<

¹¹ Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues. Quantitative Finance, 1, 223–236. Rama Cont (2001)

¹² Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues. Quantitative Finance, 1, 223–236, Rama Cont (2001)

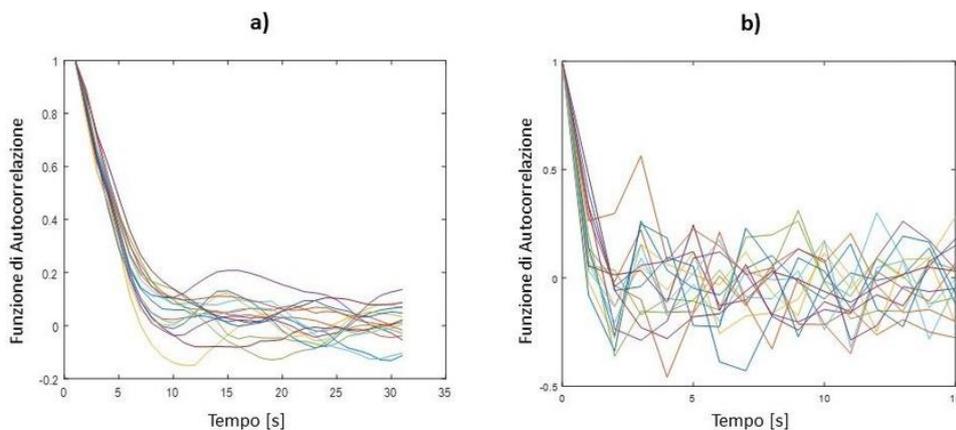
¹³ Analisi delle serie storiche: modelli ARCH e GARCH, Università degli studi Mediterranea, M. Ferrara

¹⁴ Analisi delle serie storiche: modelli ARCH e GARCH, Università degli studi Mediterranea, M. Ferrara

¹⁵ Volatility clustering nelle serie storiche economiche e finanziarie, Elena Gasparini

i dati empirici mostrano che la funzione di autocorrelazione decade a 0 molto velocemente e questo supporta l'ipotesi dell'efficienza dei mercati poiché il tempo di reazione del mercato alle nuove informazioni è rapido e quindi non si possono attuare strategie che traggono informazioni dalla correlazione. La presenza di questa legge di decadimento lento nella serie dei rendimenti al quadrato e assoluti implica che vi sia una dipendenza di lungo periodo nella volatilità.^{16>>} (Elena Gasparini). Provando a verificare la presenza di autocorrelazione nei rendimenti finanziari, Cont afferma che le autocorrelazioni (lineari) dei rendimenti degli asset sono spesso insignificanti, tranne per scale temporali molto ridotte durante la giornata (meno di 20 minuti), in cui entrano in gioco gli effetti della microstruttura; quindi, in linea generale si definisce l'autocorrelazione nei rendimenti come largamente non significativa. Nonostante ciò, Zhou (1996) e Cont (2001), notano che diminuendo gli intervalli temporali (aumentando la frequenza dei dati) le serie di rendimenti tendono a mostrare una significativa autocorrelazione negativa, in cui però è necessario considerare gli effetti di microstruttura del mercato in questione, cioè i modi in cui i normali processi sottostanti al mercato hanno effetti su prezzi, volume di scambio e comportamento degli investitori. “Questa assenza di autocorrelazione ha una spiegazione economica semplice che si ricollega a sostegno dell'ipotesi dei mercati efficienti”¹⁷ e, nello specifico, si ritrova nella strategia chiamata arbitraggio statistico: “se cambiamenti di prezzo mostrassero una correlazione significativa questa potrebbe essere usata come base per una strategia a guadagni attesi positivi”¹⁸.

La presenza dell'autocorrelazione tra i valori assoluti e i quadrati dei rendimenti stessi, che risulta essere positiva e significativa, serve per contrastare la mancanza di dipendenza nei rendimenti. In particolare, “l'autocorrelazione nei valori assoluti dei rendimenti risulta essere generalmente più alta della corrispondente autocorrelazione dei quadrati”¹⁹.



Empiricamente è stato verificato che l'eteroschedasticità è data dal fatto che le loro distribuzioni di probabilità delle serie finanziarie sono leptocurtiche. Nel prossimo punto analizzerò la distribuzione di probabilità nei rendimenti finanziari ed entrerà di più nel dettaglio.

¹⁶ Volatility clustering nelle serie storiche economiche e finanziarie, Elena Gasparini

¹⁷ “Modelli Per La Previsione Di Serie Storiche Finanziarie”, Steve Cavallin

¹⁸ “Modelli Per La Previsione Di Serie Storiche Finanziarie”, Steve Cavallin

¹⁹ “Modelli Per La Previsione Di Serie Storiche Finanziarie”, Steve Cavallin

2.2.3 LA DISTRIBUZIONE: LE “HEAVY TAILS”

Le distribuzioni di probabilità delle serie finanziarie sono leptocurtiche. “Le distribuzioni leptocurtiche hanno la particolarità di assegnare una maggiore probabilità ad eventi molto lontani dal valor medio della distribuzione rispetto alle probabilità che verrebbero assegnate a tali eventi da una distribuzione normale. Per questo motivo si parla di distribuzioni con code spesse”.²⁰

Rama Cont definisce la distribuzione nelle serie finanziarie come “a power-law or Pareto-like tail, with a tail index which is finite, higher than two and less than five”²¹, inoltre afferma che la forma precisa delle code è difficile da determinare. Quando si afferma che la distribuzione di probabilità dei rendimenti mostra una coda di tipo Pareto, si fa riferimento a una forma specifica di distribuzione delle code, chiamata legge di Pareto. La legge di Pareto è caratterizzata da code lunghe e pesanti, indicando che eventi estremi sono più probabili rispetto a quanto previsto da una distribuzione normale. Nel contesto finanziario, questo significa che ci sono probabilità significative di osservare movimenti estremi nei prezzi degli asset, che possono manifestarsi sotto forma di grandi guadagni o perdite. La legge di Pareto suggerisce che la frequenza di tali eventi diminuisce molto lentamente all'aumentare della loro ampiezza.

Il *decadimento lento delle probabilità* è la prima caratteristica deducibile dalle code di tipo Pareto nella distribuzione dei rendimenti: come afferma la legge di Pareto, un evento estremo (come forte calo o aumento dei prezzi) ha meno probabilità di essere osservato se aumenta l'ampiezza dell'evento (diventa più difficile da individuare).

Una seconda caratteristica osservabile è la presenza di *code lunghe*: la coda di tipo Pareto presenta code più lunghe rispetto ad una distribuzione normale e questo è dato dal fatto che eventi estremi, anche se rari, hanno più probabilità di verificarsi rispetto a quanto direbbe una normale distribuzione gaussiana (nel contesto della distribuzione gaussiana, o distribuzione normale, gli eventi estremi hanno probabilità estremamente basse di verificarsi. La distribuzione gaussiana è caratterizzata da code di coda rapida, il che significa che la probabilità di osservare eventi molto lontani dalla media diminuisce rapidamente allontanandosi dalla media).

La presenza di code pesanti può rendere il mercato più sensibile agli shock, con la possibilità di movimenti estremi che possono influenzare significativamente il comportamento dei prezzi: qui la gestione del rischio diventa cruciale. Visto che eventi estremi possono avere un impatto significativo sugli investimenti, gli investitori devono essere consapevoli della possibilità di coda di tipo Pareto e adottare strategie di gestione del rischio adeguate.

Una distribuzione di probabilità con una coda di tipo Pareto suggerisce che gli eventi estremi sono più comuni di quanto suggerirebbe una distribuzione normale e che tali eventi possono avere un impatto notevole sui mercati finanziari. La comprensione di questa caratteristica è fondamentale per la gestione del rischio e per sviluppare modelli finanziari più accurati.

²⁰ Analisi delle serie storiche: modelli ARCH e GARCH, Università degli studi Mediterranea, M. Ferrara

²¹ Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues. Quantitative Finance, 1, 223–236. Rama Cont (2001)

2.2.4 VOLATILITY CLUSTERING E NON STAZIONARIETÀ

"Le performance passate non riflettono necessariamente le performance future"²²: così Rama Cont inizia il suo discorso sulla stazionarietà, sottolineando l'incertezza associata agli investimenti ed evidenzia la natura imprevedibile dei mercati finanziari, e continua affermando che il "requisito più basilare di qualsiasi analisi statistica dei dati di mercato è l'esistenza di alcune proprietà statistiche dei dati in studio che rimangano stabili nel tempo"²³.

L'invarianza delle proprietà statistiche del processo di rendimento nel tempo corrisponde all'ipotesi di stazionarietà: un'ipotesi chiave nelle analisi statistiche di serie temporali in finanza. L'ipotesi di stazionarietà suggerisce che le proprietà statistiche del processo di rendimento rimangano invariate nel tempo. La stazionarietà implica che la media, la varianza e altre proprietà statistiche della serie di dati non cambino significativamente tra diversi periodi temporali, e che quindi:

- La media o il valore medio dei dati rimane costante nel tempo.
- La variabilità o la dispersione dei dati rimane costante nel tempo.
- La correlazione tra le osservazioni a diversi punti temporali rimane costante.

Questo significa che "per qualsiasi insieme di istanti temporali t_1, \dots, t_k e qualsiasi intervallo di tempo τ , la distribuzione congiunta dei rendimenti $r(t_1, T), \dots, r(t_k, T)$ è la stessa della distribuzione congiunta dei rendimenti $r(t_1 + \tau, T), \dots, r(t_k + \tau, T)$. Non è ovvio che i rendimenti verifichino questa proprietà nel tempo calendario, a causa di effetti di stagionalità."²⁴

In realtà, questa proprietà può essere considerata come una definizione dell'indice temporale t , definito come il modo appropriato per "deformare" il tempo calendario al fine di ottenere la stazionarietà. "Questa deformazione temporale è scelta per correggere le stagionalità osservate nel tempo calendario ed è quindi solitamente una misura cumulativa dell'attività di mercato."²⁵

La stazionarietà è cruciale per la modellazione e l'analisi statistiche perché consente lo sviluppo di modelli basati sull'assunzione che le proprietà sottostanti dei dati siano stabili. Tuttavia, raggiungere una stazionarietà perfetta nei dati temporali finanziari è difficile, poiché i mercati finanziari sono dinamici e soggetti a vari fattori esterni.

Ricercatori e analisti spesso applicano tecniche come il differenziamento o le trasformazioni per rendere i dati delle serie temporali più stazionari. Nonostante questi sforzi, è importante riconoscere che i mercati finanziari possono mostrare comportamenti non stazionari, e l'avviso sulle performance passate che non garantiscono le performance future riflette il riconoscimento

²² Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues. Quantitative Finance, 1, 223–236. Rama Cont (2001)

²³ Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues. Quantitative Finance, 1, 223–236. Rama Cont (2001)

²⁴ Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues. Quantitative Finance, 1, 223–236. Rama Cont (2001)

²⁵ Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues. Quantitative Finance, 1, 223–236. Rama Cont (2001)

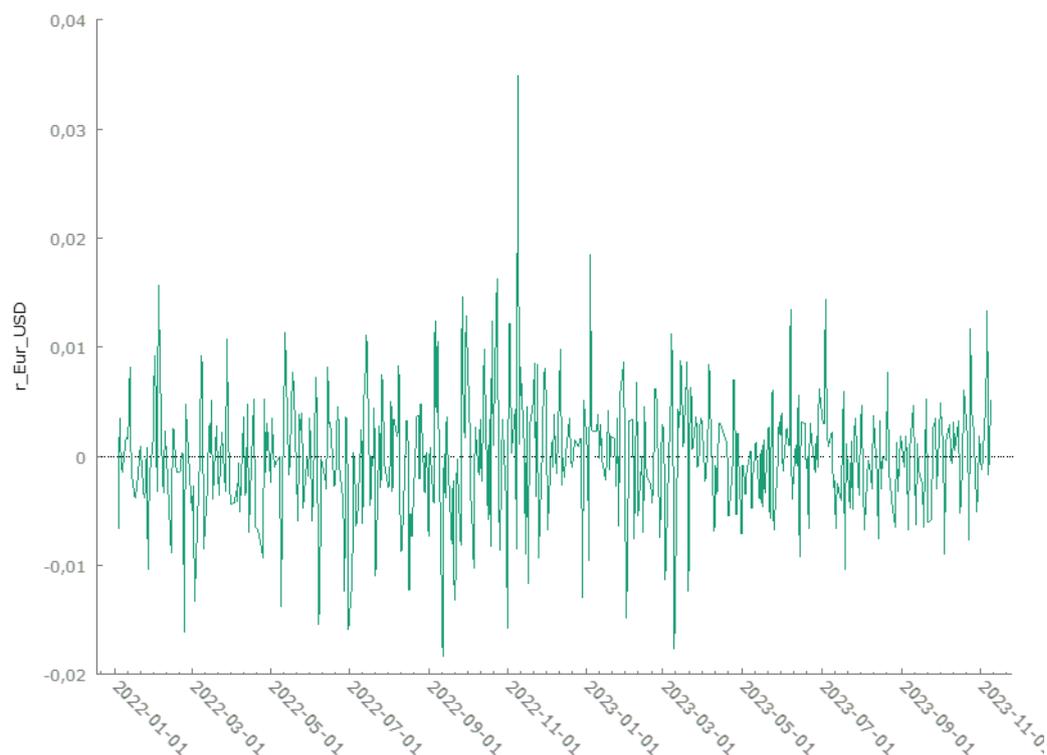
di questa intrinseca incertezza nella previsione finanziaria e nella presa di decisioni sugli investimenti.

Proprio per questi motivi “di mercato” appena citati, un altro fatto stilizzato chiave dei rendimenti finanziari è la loro non-stazionarietà: “nelle serie temporali finanziarie, la media dei rendimenti è generalmente circa zero ma, lo scarto quadratico, subisce un fenomeno chiamato volatility clustering, cioè vaste variazioni di prezzo tendono ad essere seguite da altrettanto vaste variazioni e, in maniera analoga, piccole variazioni tendono ad essere seguite da altrettanto piccole variazioni”²⁶. Le parole di Steve Cavallin nella sua tesi di laurea su “Modelli Per La Previsione Di Serie Storiche Finanziarie”, spiegano molto bene questo concetto: <<questo fenomeno si può ricollegare all’autocorrelazione dei rendimenti assoluti e quadrati: variazioni di prezzo in termini assoluti correlate tra loro implicano che ampie variazioni sono susseguite da ampie variazioni, portando al fenomeno del volatility clustering>> (Steve Cavallin). Osservando la presenza di volatilità “a grappoli” si riesce ad intuire che “lo scarto quadratico medio dei rendimenti non è costante nel tempo e le distribuzioni dei rendimenti finanziari non sono stazionarie”²⁷: con l’osservazione di questo fenomeno si è giunti a nuovi modelli di analisi delle serie storiche finanziarie, quali ARCH (Engle, 1982) e GARCH (Bollerslev, 1986) che analizzerò nel prossimo capitolo. Generalmente le serie temporali finanziarie sono da considerarsi come debolmente stazionarie: la media dei rendimenti e la covarianza tra i rendimenti ad un tempo t e quelli ad un tempo $t-I$ (con I scelto arbitrariamente) non variano nel tempo (Tsay, 2010). “L’assenza di stazionarietà è facilmente osservabile anche tramite i cosiddetti effetti di calendario, cioè anomalie cicliche nei rendimenti in base alla loro posizione nel tempo in termini di calendario”²⁸. Questi effetti sono ben sintetizzati da Sewell (2011) e si riflettono a più livelli: giornaliero, settimanale e mensile, e verranno analizzati successivamente.

²⁶ “Modelli Per La Previsione Di Serie Storiche Finanziarie”, Steve Cavallin

²⁷ “Modelli Per La Previsione Di Serie Storiche Finanziarie”, Steve Cavallin

²⁸ “Modelli Per La Previsione Di Serie Storiche Finanziarie”, Steve Cavallin



2.2.5 GLI EFFETTI CALENDARIO

Sewell (2011) descrive gli effetti calendario (o effetti di stagionalità) come “are cyclical anomalies in returns, where the cycle is based on the calendar”²⁹, ovvero anomalie cicliche nei rendimenti, dove il ciclo si basa sul calendario. Gli effetti calendario più importanti sono (o almeno erano) l'effetto di gennaio e l'effetto del fine settimana: in questo paragrafo proverò ad analizzare brevemente anche l'intraday effect e l'intramonth effect.

INTRADAY EFFECT

L'effetto intraday si riferisce a modelli e anomalie che si verificano durante il corso di una singola giornata di negoziazione sui mercati finanziari. Gli studiosi analizzano l'andamento dei prezzi, i rendimenti e altri indicatori durante diverse fasi della giornata di negoziazione per identificare possibili modelli o comportamenti inaspettati. Gli effetti intraday possono variare tra mercati e nel corso del tempo, e gli investitori e gli analisti studiano tali modelli per cercare di identificare opportunità di trading o comprendere meglio la dinamica del mercato. Va notato che l'effetto intraday è solo uno degli aspetti dell'analisi temporale nei mercati finanziari, che può anche includere considerazioni di più ampio respiro come effetti stagionali, settimanali o mensili.

²⁹ Sewell Martin, (2011), Characterization of Financial Time Series, Research Note RN/11/01 UCL DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE

Nell'articolo del 1986, Harris osservò che "per tutte le società, si accumulano significative differenze nei rendimenti intraday nei giorni feriali durante i primi 45 minuti dopo l'apertura del mercato. Nei lunedì mattina, i prezzi diminuiscono, mentre negli altri giorni feriali, aumentano. Altrimenti, il modello di rendimenti intraday è simile in tutti i giorni feriali. Degno di nota è un aumento dei prezzi nell'ultima transazione della giornata."³⁰ Harris (1989) identificò un'anomalia dei prezzi alla fine della giornata. Venne osservata una grande variazione media dei prezzi sull'ultima transazione giornaliera del NYSE.

INTRAMONTH EFFECT

Sewell, nel suo articolo "Characterization of Financial Time Series", pubblicato il 20/01/2011, nota che gli effetti intramensili includono "l'esistenza di rendimenti positivi solo nella prima metà del mese e, più specificamente, un effetto "turn-of-the-month" in cui l'ultimo giorno di un mese e i primi tre del successivo sono particolarmente elevati"³¹. I suoi studi erano basati sul documento "'A monthly effect in stock returns" di Robert Ariel (Ariel, 1987)" dove Ariel arrivò alla conclusione che "il rendimento medio per le azioni è positivo solo nei giorni immediatamente precedenti e durante la prima metà dei mesi del calendario, e indistinguibile da zero nei giorni dell'ultima metà del mese"³².

Gli effetti intramensili includono l'esistenza di rendimenti positivi solo nella prima metà del mese e, più specificamente, un effetto "turn-of-the-month" in cui l'ultimo giorno di un mese e i primi tre del successivo sono particolarmente elevati. Egli concluse che "il rendimento medio per le azioni è positivo solo nei giorni immediatamente precedenti e durante la prima metà dei mesi del calendario, e indistinguibile da zero nei giorni dell'ultima metà del mese"³³.

A sostegno della tesi di Ariel, Penman nel 1987 osservò che le notizie sugli utili aziendali che arrivano al mercato nella prima metà dei mesi del calendario 2 su 4 tendono ad essere positive, mentre i report sugli utili che arrivano in seguito tendono a fornire cattive notizie. Ogden nel 1990 dimostrò che la standardizzazione dei pagamenti negli Stati Uniti al cambio di ogni mese del calendario generalmente comporta un aumento dei rendimenti azionari al cambio di ogni mese del calendario. Per fare più chiarezza su questo effetto, Nikkinen nel 2007 afferma che gli effetti al cambio di mese e intramensili derivano da "informazioni raggruppate": importanti annunci di notizie macroeconomiche, rilasciati sistematicamente in un certo punto ogni mese.

WEEKEND EFFECT

L'effetto weekend (noto anche come effetto lunedì) è la tendenza dei prezzi dei titoli a chiudere in ribasso il lunedì rispetto al venerdì precedente. Questa anomalia è particolarmente intrigante

³⁰ Harris L., (1986), A TRANSACTION DATA STUDY OF WEEKLY AND INTRADAILY PATTERNS IN STOCK RETURNS, *Journal of Financial Economics* 16 (1986) 99-117. North-Holland

³¹ Sewell Martin, (2011), Characterization of Financial Time Series, Research Note RN/11/01 UCL DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE

³² Ariel Robert, (1987). A Monthly Effect in Stock Returns

³³ Sewell Martin, (2011), Characterization of Financial Time Series, Research Note RN/11/01 UCL DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE

perché, poiché i rendimenti del lunedì coprono tre giorni, ci si potrebbe aspettare che, se mai, i rendimenti di un lunedì siano superiori rispetto agli altri giorni della settimana a causa del periodo più lungo e del maggiore rischio.

L'effetto weekend fu notato per la prima volta da Fields (1931). Cross (1973) osservò che il mercato tendeva a salire il venerdì e a scendere il lunedì. Il suo studio sul weekend effect è basato sull'articolo "Stock returns and the weekend effect" pubblicato nel 1980 da Kenneth R. French. L'autore notò che secondo l'ipotesi del tempo calendario, "i rendimenti medi del lunedì dovrebbero essere tre volte il rendimento atteso per gli altri giorni della settimana, mentre secondo l'ipotesi del tempo di negoziazione il rendimento atteso è lo stesso per ogni giorno della settimana. French arrivò alla conclusione che nessuna delle due ipotesi fosse vera e che, sebbene il rendimento medio per gli altri quattro giorni della settimana fosse positivo, la media per il lunedì era significativamente negativa"³⁴. Harris (1986) studiò modelli settimanali e infragiornalieri nei rendimenti delle azioni e scoprì che il lunedì mattina i prezzi scendevano, mentre nelle altre mattine dei giorni feriali aumentavano.

Lakonishok e Maberly (1990) documentarono i modelli di negoziazione degli investitori individuali e istituzionali e venne fuori che "il lunedì era il giorno con il volume di negoziazione più basso; inoltre, la propensione degli individui a effettuare transazioni il lunedì era la più elevata rispetto agli altri giorni della settimana, mentre quella delle istituzioni era la più bassa"³⁵. Scoprirono anche una tendenza per gli individui ad aumentare il numero di transazioni di vendita rispetto a quelle di acquisto il lunedì, il che potrebbe spiegare almeno in parte l'effetto weekend. Questa tesi viene poi avvalorata dagli studi di Chen e Singal che nel 2003 affermano che "gli speculatori venditori allo scoperto causano l'effetto weekend", anche se successivamente questo lavoro venne completamente smentito da Christophe che, nel 2009, "esamina le vendite allo scoperto giornaliere delle azioni Nasdaq e scopre che le vendite speculative non spiegano nulla di significativo dal punto di vista economico dell'effetto weekend nei rendimenti"³⁶.

Abraham e Ikenberry (1994) sostenevano che "l'effetto del lunedì è sostanzialmente la conseguenza delle informazioni rivelate nelle sessioni di negoziazione precedenti, in particolare il venerdì"³⁷. Nel suo lavoro sui mercati razionali, Rubinstein (2001) ci informa che, anche se "l'effetto del lunedì sia il più forte delle anomalie del calendario, non è abbastanza ampio da supportare una strategia di trading redditizia se si assumono costi di negoziazione realistici, e che dopo il 1987 l'effetto del lunedì è scomparso e addirittura invertito"³⁸.

³⁴ Sewell Martin, (2011), Characterization of Financial Time Series, Research Note RN/11/01 UCL DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE

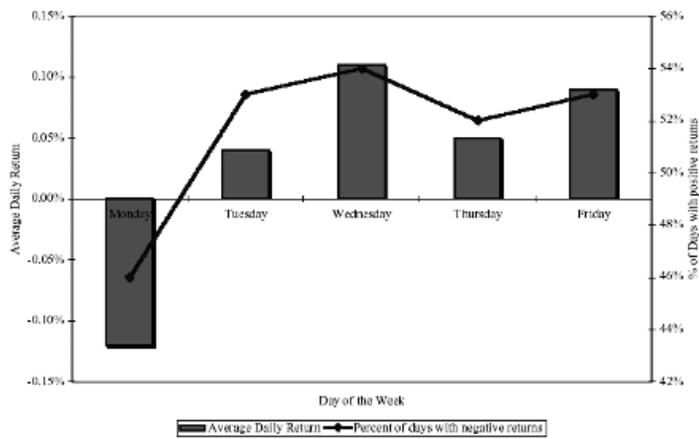
³⁵ Sewell Martin, (2011), Characterization of Financial Time Series, Research Note RN/11/01 UCL DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE

³⁶ Sewell Martin, (2011), Characterization of Financial Time Series, Research Note RN/11/01 UCL DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE

³⁷ Sewell Martin, (2011), Characterization of Financial Time Series, Research Note RN/11/01 UCL DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE

³⁸ Sewell Martin, (2011), Characterization of Financial Time Series, Research Note RN/11/01 UCL DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE

Figure 7.6: Returns by Day of the Week - 1927-2001



JANUARY EFFECT

L'effetto gennaio, noto anche come l'anomalia di inizio d'anno, è un fenomeno osservato nei mercati finanziari, in particolare nel mercato azionario che si manifesta con rendimenti più elevati per le azioni comuni durante il mese di gennaio rispetto agli altri mesi dell'anno (*aumento dei prezzi delle azioni rispetto agli altri mesi dell'anno*). Riguarda soprattutto le azioni di piccola capitalizzazione nei primi giorni del mese: questo significa che le società con capitalizzazioni di mercato inferiori possono registrare rendimenti ancora più significativi rispetto alle aziende di maggiore capitalizzazione durante questo periodo. Il primo ad osservare il *january effect* è stato Wachtel nel 1942: durante uno studio identificò un aumento stagionale da dicembre a gennaio. Nonostante alcune variazioni nel corso degli anni e le discussioni sulla sua forza, l'effetto gennaio è stato osservato in diversi periodi storici e in molte giurisdizioni di mercato.

Roll (1983) fu il primo che cercò di dare una spiegazione dell'anomalia e, secondo lui, l'effetto gennaio è dovuto alla *vendita per perdite fiscali* indotta dai rendimenti negativi dell'anno precedente: per questa teoria, gli investitori possono vendere le azioni con perdite verso la fine dell'anno per compensare i guadagni e ridurre l'imposta sul reddito. Questa vendita di azioni può abbassare i prezzi a dicembre, creando opportunità di acquisto a gennaio quando gli investitori rientrano nel mercato. Di fatti, l'effetto gennaio è spesso accompagnato da variazioni nel volume di negoziazione (ad esempio il volume degli scambi potrebbe aumentare alla fine dell'anno, quando si vende per perdite fiscali, e potrebbe essere seguito da un altro aumento a gennaio, quando gli investitori tornano sul mercato).

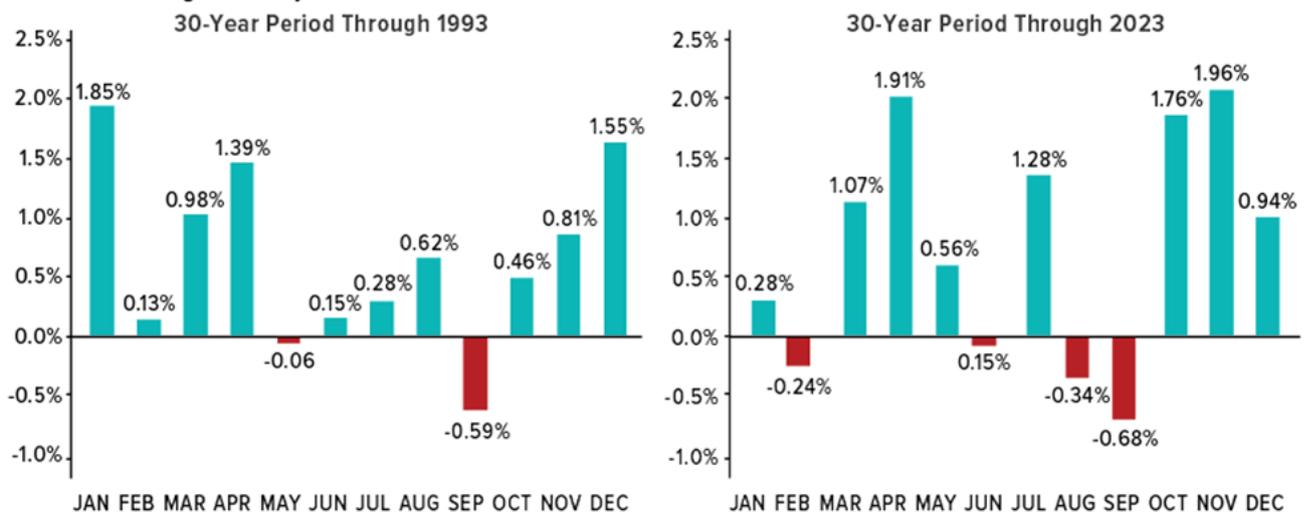
Reinganum (1983) dimostrò che i rendimenti molto elevati delle piccole imprese durante i primi giorni di negoziazione di gennaio sembrano essere coerenti con la vendita per perdite fiscali, ma la vendita per perdite fiscali non può spiegare l'intero effetto stagionale di gennaio. Nel 1988 viene dimostrato che il rapporto tra acquisti e vendite di azioni da parte degli investitori individuali spiega circa la metà dell'effetto inizio d'anno (Ritter, 1988). Qualche anno più tardi viene scoperto che l'effetto di gennaio è principalmente un fenomeno legato a prezzi delle azioni bassi piuttosto che un effetto di piccole imprese e Poterba e Weisbenner (2001) hanno suggerito che le negoziazioni motivate dalle imposte alla fine dell'anno da parte degli investitori individuali contribuiscono alle anomalie dei rendimenti di inizio anno.

Studi recenti sono arrivati alla conclusione che l'effetto gennaio esiste ancora, ma si è spostato a dicembre e che questa anomalia non è dovuta al rischio in sé, ma piuttosto è dovuto a una maggiore compensazione per il rischio (il premio di rischio) nel mese.

È importante notare che, mentre l'effetto gennaio è stato ampiamente osservato, non tutti gli investitori concordano sulla sua origine o sulla sua persistenza. Alcuni ritengono che le dinamiche del mercato e le strategie di investimento abbiano influenzato e attenuato l'effetto nel tempo.

Does the January Effect Still Work?

S&P 500, Average Monthly Returns



Past performance does not guarantee future results. It is not possible to invest in an index.
Source: Bloomberg, U.S. Global Investors

2.2.6 L'EFFETTO LEVA (LEVERAGE EFFECT)

L'effetto leva (leverage effect), anche chiamato asimmetria della volatilità, è un fenomeno che collega negativamente i movimenti dei prezzi con la volatilità: si può notare che la varianza aumenta maggiormente in corrispondenza di perdite del titolo, rispetto agli intervalli in cui il prezzo sale. Rama Cont dimostra che “most measures of volatility of an asset are negatively correlated with the returns of that asset”³⁹ e questo significa che “le fluttuazione dei prezzi che portano a rendimenti negativi generano delle fluttuazioni maggiori nella misura di volatilità, rispetto ai cambiamenti del fattore di dispersione generato da rendimenti positivi di egual entità”⁴⁰: questa situazione mette in chiaro come ci sia un collegamento tra prezzi e volatilità. Il primo autore che si interessò a questo fenomeno particolare è stato Black che, nel 1976, si

³⁹ Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues. Quantitative Finance, 1, 223–236. Rama Cont (2001)

⁴⁰ Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues. Quantitative Finance, 1, 223–236. Rama Cont (2001)

accorse che, quando i rendimenti sono più bassi del loro valore atteso (bad news), la volatilità tende ad aumentare e viceversa (la volatilità diminuisce in risposta a good news).

Un'altra interpretazione del fenomeno afferma che "l'aumento di volatilità del titolo genera incertezza e quindi può comportare una caduta dei prezzi"⁴¹: una diminuzione del prezzo del titolo aumenta il rapporto tra indebitamento e valore della società, facendo aumentare la percezione di rischio e di conseguenza la volatilità legata a questo fattore.

Nei primi anni 2000 l'effetto leva viene studiato da altri autori come Bouchaud e Potters e, i risultati empirici del loro studio, hanno messo in evidenza una correlazione tra volatilità futura e prezzi passati, notando che la correlazione era più forte nel caso degli indici rispetto al caso dei singoli titoli: si decide così di arrivare a due conclusioni differenti, una per le azioni singole e una per gli indici.

Nel caso di azioni singole si ha la presenza di un effetto ritardo dove il prezzo di riferimento usato, per descrivere l'aggiornamento dei prezzi, è una media mobile degli ultimi mesi. Nel caso di indici si assiste ad un fenomeno di panico nel mercato di riferimento che produce il cosiddetto effetto leva.

2.2.7 LA CORRELAZIONE TRA VOLUME E VOLATILITÀ

Diversi studi hanno analizzato la correlazione tra volume e volatilità evidenziando una forte correlazione positiva tra le due componenti.

Louhichi (2011) considera quali possano essere le cause alla base di questa correlazione: nota che gli aggiustamenti del prezzo nella serie storica dipendono dalle nuove informazioni che vengono recepite dal mercato. Queste "nuove informazioni" generano differenze nel prezzo con un impatto sulla volatilità e, a sua volta, il nuovo prezzo genera delle nuove contrattazioni che incidono sul volume. "Questo fattore può essere definito un comune denominatore per la volatilità e il volume e per questo può generare cambiamenti combinati tra le due componenti"⁴².

Per capire meglio la dinamica di questo fenomeno occorre entrare più nello specifico ed analizzare il volume: si arriva alla scomposizione del volume nel numero di contrattazione e nella grandezza di queste ultime.

Ci sono due ipotesi alternative:

1. gli investitori con informazioni significative sul cambiamento del prezzo preferiscono compiere grandi cambiamenti nell'investimento generando una correlazione positiva causata dalla grandezza degli investimenti,
2. per mascherare le informazioni su possibili cambiamenti del prezzo si preferiscano fare molti ma piccoli investimenti generando così una correlazione con il numero di contrattazioni.

⁴¹ Volatility clustering nelle serie storiche economiche e finanziarie, Elena Gasparini

⁴² Volatility clustering nelle serie storiche economiche e finanziarie, Elena Gasparini

Entrambe le ipotesi sono supportate da studi sul mercato americano.

<<La volatilità può assumere valori più o meno grandi in base alla distanza che vi è fra il prezzo al tempo t e al tempo $t+1$, nel caso in cui la variazione sia descritta da valori bassi siamo in presenza di una volatilità in forma continua, nel caso in cui ci siano invece dei salti tra i valori del prezzo essi si ripercuotono in salti nel valore della volatilità. Queste due tipologie di dispersione intorno al valor medio possono essere analizzate per vedere quale delle due favorisce la correlazione. Diversi studi hanno scomposto la volatilità nelle due categorie riscontrando una correlazione positiva tra volume e la volatilità continua ed una correlazione negativa tra volume e i grandi cambiamenti del fattore di dispersione>> (Elena Gasparini).

Un'altra scuola di pensiero afferma che la correlazione sia negativa o positiva in base alla provenienza delle informazioni: le informazioni che creano i grandi cambiamenti per generare una correlazione negativa potrebbero essere di tipo pubblico, mentre le informazioni private guidano la correlazione positiva della parte continua.

CAPITOLO 3 – I MODELLI ECONOMETRICI: ARCH E GARCH

3.1. IL MODELLO ARCH DI ENGLE

Il modello ARCH è utilizzato per modellare la volatilità condizionale nei dati finanziari. La volatilità è una misura della variazione dei prezzi nel tempo, e l'eteroschedasticità condizionale indica che la varianza della serie temporale non è costante, ma cambia in risposta alle informazioni passate.

Il primo modello ARCH, ovvero Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, è stato elaborato da Engle (1982). Elena Gasparini spiega molto bene l'idea dal quale nasce il modello ARCH e dice che: <<Il presupposto per la costituzione del modello è stato quello di eseguire un'analisi del fenomeno della volatility clustering come una forma di eteroschedasticità nei rendimenti finanziari e che la varianza dei termini di errore di un certo modello volto a descriverne l'andamento dipenda dai rendimenti stessi. Prima l'analisi delle serie finanziarie aveva come limite il momento primo condizionale, considerando invece i momenti successivi come semplici vincoli. Ora, l'analisi delle caratteristiche del rischio negli investimenti finanziari e della loro volatilità ha aperto alla nascita di nuove tecniche di analisi, basate principalmente sui momenti condizionali successivi al primo.>> (Elena Gasparini)

È un modello adeguato alla descrizione del fenomeno empirico del volatility clustering secondo il quale periodi di elevata volatilità tendono a permanere e sono seguiti da periodi di relativa stabilità che a loro volta manifestano una certa persistenza.

Il modello Arch si basa su alcune assunzioni:

1. Eteroschedasticità Condizionale: L'assunzione principale è che la varianza di un dato istante temporale dipenda dalle informazioni sugli istanti precedenti. Questa assunzione riflette la natura dinamica della volatilità nei dati finanziari, che può variare nel tempo in risposta alle informazioni passate.
2. “Gli shock che influiscono sui processi sottostanti non sono indipendentemente distribuiti anche se sono serialmente non correlati”⁴³;
3. “La distribuzione del processo condizionata al set informativo disponibile ha momenti secondi temporalmente dipendenti”⁴⁴.

“L'elaborazione dei modelli ARCH apre ad una nuova classe di processi anche non lineari né in media né in varianza in grado di spiegare la volatilità variabile nelle serie finanziarie e le diverse caratteristiche connesse”⁴⁵. Per modellare i cambiamenti nella volatilità,

⁴³ Analisi delle serie storiche: modelli ARCH e GARCH, Università degli studi Mediterranea, M. Ferrara

⁴⁴ Analisi delle serie storiche: modelli ARCH e GARCH, Università degli studi Mediterranea, M. Ferrara

⁴⁵ Volatility clustering nelle serie storiche economiche e finanziarie, Elena Gasparini

particolarmente coi modelli ARCH, si considera il termine di disturbo ε_t senza correlazione seriale ma con una dipendenza nota dalla seguente equazione:

$$\varepsilon_t = \sigma_t u_t \quad u_t \sim iid(0,1)$$

Dove z_t per semplicità spesso si considera distribuito come una normale con media 0 e varianza 1. Mentre i rendimenti r_t possono essere ad esempio pari a:

$$r_t = \mu + \varepsilon_t \quad (1)$$

Da questo presupposto, in base a come si considera σ_t , è possibile spiegare i modelli di tipo ARCH. Concentrandosi sul modello ARCH(m), la varianza assume un andamento di questo tipo:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^m \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 \quad (1.1)$$

Con $\omega > 0$ e $\alpha_j \geq 0$.

Da questo modello si può subito notare che, “se un certo shock ε_{t-i}^2 è elevato questo implica che la varianza condizionata ad un istante successivo a (t-i) sarà elevata a sua volta e, di conseguenza, shock elevati tendono ad essere seguiti da altrettanto elevate variazioni di prezzo (in valore assoluto), descrivendo quel fenomeno già sottolineato dal nome di volatility clustering”⁴⁶.

Consideriamo ora, per semplicità, il modello ARCH (1):

$$\varepsilon_t = \sigma_t u_t \quad (1.2)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 \quad (1.3)$$

È possibile capire meglio il funzionamento dei modelli ARCH analizzandone le loro proprietà.

3.1.1 PROPRIETÀ DEL MODELLO: LA TEORIA

1. Il modello ARCH è debolmente stazionario se e solo se le radici dell'equazione del modello sono esterne al cerchio unitario. Se la varianza condizionata dovesse essere non negativa, la condizione necessaria e sufficiente per la stazionarietà del processo ARCH sarebbe che $\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_m < 1$
2. Il processo è non lineare: non può essere espresso come combinazione lineare di una successione (anche infinita) di variabili casuali.

⁴⁶ Volatility clustering nelle serie storiche economiche e finanziarie, Elena Gasparini

3. Il processo ARCH (1) ha una distribuzione non condizionata di r_t caratterizzata da code più elevate rispetto alla distribuzione condizionata (indice di curtosi $>$ di 3).
4. I residui del modello sono correlati ma non indipendenti, per cui si può dire che presentano una dipendenza non lineare. I quadrati dei residui sono invece correlati. Essendo non lineare il metodo adottato per effettuare la stima dei parametri è quello della massima verosimiglianza: garantisce la consistenza e l'efficienza asintotica delle stime.

3.1.2 PROPRIETÀ DEL MODELLO: SVOLGIMENTO MATEMATICO

Innanzitutto, considerando un set informativo $I_{t-1} = \{\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-3}, \dots, \varepsilon_{t-m}\}$ la media non condizionata di ε_t rimane pari a zero, in quanto:

$$E(\varepsilon_t) = E[E(\varepsilon_t|I_{t-1})] = E[\sigma_t E(z_t)] = 0 \quad (1.4)$$

Mentre la varianza non condizionata di ε_t può essere ottenuta come:

$$Var(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = E[E(\varepsilon_t^2|I_{t-1})] = \omega + \alpha_1 E(\varepsilon_{t-1}^2) \quad (1.5)$$

Siccome ε_t è un processo stazionario a media zero si avrà che $Var(\varepsilon_t) = Var(\varepsilon_{t-1}) = E(\varepsilon_{t-1}^2)$ e quindi che $Var(\varepsilon_t) = \omega/(1 - \alpha_1)$, da cui bisogna imporre $0 \leq \alpha_1 < 1$, dato che la varianza deve essere positiva.

Andando ad analizzare il momento quarto di ε_t , si può notare come i modelli ARCH spieghino anche la presenza di code grosse della distribuzione. Infatti, è possibile dimostrare che l'indice di curtosi del modello ARCH (1) è pari a $3 \cdot \frac{1-\alpha_1^2}{1-3\alpha_1^2} > 3$, ovvero un indice di curtosi maggiore dell'indice della distribuzione normale.

3.1.3 VANTAGGI E SVANTAGGI DEL MODELLO

Descrivendo le proprietà del modello si possono notare immediatamente i vantaggi: la possibilità di riprodurre il fenomeno della volatility clustering e la presenza di code grosse nella distribuzione di ε_t . Si deve, però, indossare la lente d'ingrandimento e fare delle considerazioni sugli svantaggi e i limiti di questi modelli:

- il modello assume che shock positivi o negativi abbiano lo stesso effetto sulla volatilità in quanto essa dipende dal quadrato degli shock precedenti: non è così.

Nella pratica è risaputo che è presente una risposta differente rispetto a shock positivi o negativi, soprattutto nei mercati azionari: è il fenomeno dell'effetto leva

- Il modello è **restrittivo**: nel caso di ARCH(1) perché esista un momento quarto finito α_1 deve essere incluso nell'intervallo $[0, 1/3]$ con limitazioni più ampie per modelli di ordine superiore.

- Il modello non produce alcun suggerimento per capire le fonti delle variazioni nelle serie finanziarie ma rappresenta una semplice descrizione del comportamento delle varianze condizionate
- Il modello risponde **lentamente** ad ampi e isolati shock sui prezzi, con la possibilità di sovrastimare la volatilità.

Lo sviluppo del modello ARCH ha aiutato molto e facilitato la descrizione e la previsione della volatilità nelle serie storiche finanziarie: senza questo modello non si sarebbe potuti arrivare a modelli come il modello GARCH di Bollerslev ed ai modelli asimmetrici come I-GARCH ed E-GARCH, capaci di migliorare il modello ARCH, riducendone i limiti ed aumentandone l'efficacia nella previsione.

3.2. IL MODELLO GARCH DI BOLLERSLEV

“Modellare la varianza con un modello ARCH potrebbe richiedere un ordine p elevato dovendo includere molteplici ritardi”⁴⁷: questo problema si può tranquillamente risolvere tramite l’inserimento nella specificazione di informazioni lontane nel tempo che possono condurre ad un’errata descrizione del modello. Così Bollerslev, nel 1986, introdusse la classe di modelli GARCH ovvero Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity che rappresentano la generalizzazione dei modelli ARCH. La formulazione del modello comprende una seconda componente autoregressiva rappresentata da q ritardi della varianza condizionata passata: così facendo, il modello risulta più preciso rispetto al processo ARCH(p). Il modello GARCH(p,q) è così definito:

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= \sigma_t u_t \\ \sigma_t^2 &= \omega + \sum_{i=1}^m \alpha_j \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j \sigma_{t-j}^2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Dove:

- u_t è una successione di variabili casuali indipendenti e identicamente distribuite con media zero e varianza 1
- m è l’ordine dei ritardi dell’innovazione;
- s rappresenta il numero dei ritardi della varianza condizionata passata.

In questo modello il valore della varianza condizionata passata viene inserito perché rappresenta una sintesi delle informazioni passate per una percentuale γ . Anche questo modello richiede siano soddisfatte delle condizioni sui parametri:

- $\omega > 0, \alpha_i \geq 0, \beta_i \geq 0$ per avere una varianza positiva
- $\sum_{i=1}^{\max(m,s)} (\alpha_i + \beta_i) < 1$ come condizione di stazionarietà

⁴⁷ Volatility clustering nelle serie storiche economiche e finanziarie, Elena Gasparini

Il modello è in grado di descrivere il fenomeno della volatility clustering: se si ha un valore alto di ε_{t-i}^2 e σ_{t-j}^2 , si genera un valore alto al tempo t nelle stesse due componenti. La varianza non condizionata del modello è dimostrabile essere pari a:

$$\sigma^2 = \frac{\omega}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)} \quad (2.2)$$

Dove $\beta_1 + \gamma_1$ è definito fattore di persistenza della volatilità. Anche il modello GARCH descrive una distribuzione leptocurtica come dimostra Bollerslev (1986), infatti il momento quarto esiste se:

$$3\alpha_i^2 + 2\alpha_i\beta_i + \beta_i^2 < 1 \quad (2.3)$$

e il valore atteso dell'innovazione al quadrato è pari a:

$$E(\varepsilon_t^2) = \frac{\omega}{1 - \alpha_1 - \beta_1} \quad (2.4)$$

Il momento quarto è quindi definito come:

$$E(\varepsilon_t^4) = \frac{3\omega^2(1 + \alpha_1 + \beta_1)}{(1 - \alpha_1 - \beta_1) * (1 - 3\alpha_1^2 - 2\alpha_1\beta_1)} \quad (2.5)$$

Quindi l'indice di curtosi è pari a:

$$k = \frac{(E(\varepsilon_t^4) - 3E(\varepsilon_t^2)^2)}{E(\varepsilon_t^2)^2} = \frac{6\alpha_1^2}{(1 - 3\alpha_1^2 - 2\alpha_1\beta_1 - \beta_1^2)} \quad (2.6)$$

con valore positivo e quindi descrive una distribuzione a code spesse.

È possibile dimostrare che un processo GARCH(p,q) è la rappresentazione di un processo ARCH(∞), si procede per iterazione:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1h_{t-1} \quad (2.7)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1(\omega + \alpha_2\varepsilon_{t-2}^2 + \beta_1h_{t-2}) \quad (2.8)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1[\omega + \alpha_2\varepsilon_{t-2}^2 + \beta_2(\omega + \alpha_3\varepsilon_{t-3}^2 + \beta_3h_{t-3})] \quad (2.9)$$

Che si può trasformare in:

$$\sigma_t^2 = \omega \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i + \alpha_i \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \varepsilon_{t-i-1}^2 \quad (2.10)$$

Come spiegato in maniera simile dal modello ARCH, si può notare come <<alti valori di ε_{t-1}^2 portino ad avere elevati valori per la varianza condizionata al tempo t, portando alle stesse conclusioni ottenute con il modello di Engle, ovvero che ampi shock ε_{t-1}^2 tendono ad essere seguiti da altrettanto ampi ε_t^2 , creando il fenomeno del volatility clustering>> (Steve Cavalin). Inoltre, analizzando il momento quarto di ε_t^2 , è possibile trarre le stesse conclusioni sulla curtosi dei modelli ARCH anche per i modelli GARCH. Sostanziali differenze invece si notano, come già osservato, sul numero di parametri che normalmente vengono utilizzati nelle applicazioni

pratiche dei modelli GARCH: infatti, i modelli GARCH più utilizzati sono GARCH (1,1), GARCH (1,2) o GARCH (2,1) con una netta prevalenza del modello GARCH (1,1).

Il modello GARCH è in grado di semplificare la classe di modelli ARCH ma, purtroppo, ne mantiene gli stessi punti di debolezza. Inoltre, studi recenti su serie finanziarie ad alta frequenza hanno mostrato come il comportamento delle code di questo modello rimane ridotto rispetto all'evidenza empirica (Tsay, 2014).

3.3. I MODELLI CON ASIMMETRIA

<<La specificazione ARCH e GARCH descrive l'impatto delle notizie come simmetrico e non descrivono alcuna asimmetria tra le conseguenze delle news positive o negative, considerando invece, per ogni nuova informazione un effetto quadratico (e quindi simmetrico rispetto allo 0) della volatilità.>> (Elena Gasparini)

Il modello ARCH si basa solamente sulle innovazioni passate, il modello GARCH utilizza anche la varianza condizionata passata per avere un modello più parsimonioso del precedente. Tuttavia, la struttura del Garch ha dei limiti:

- “Incapacità di descrivere il fenomeno asimmetrico descritto da Black (1976) per cui i rendimenti delle azioni sono correlati negativamente ai cambiamenti della volatilità”⁴⁸: il modello GARCH descrive solo l'ampiezza della volatilità ma non il segno
- Imposizione di restrizione per alcuni parametri
- Problemi di interpretazione della persistenza degli shock.

I modelli che sono stati studiati a partire dalla generalizzazione del modello GARCH hanno cercato di superare tali limiti cercando di rimuovere i vincoli di non negatività e/o di descrivere l'effetto leverage.

Quando si tratta l'effetto leva, come abbiamo già discusso precedentemente, la volatilità reagisce diversamente a shock positivi e negativi (Black, 1976): si ha una maggiore volatilità a seguito di una discesa dei prezzi; quindi, i movimenti di volatilità e dei rendimenti sono negativamente correlati. Da questa intuizione di Black nascono i modelli con asimmetria. <<L'asimmetria si configura nel fatto che la volatilità tende ad aumentare in corrispondenza delle “bad news”, ovvero in quei periodi in cui il livello dei rendimenti è minore di quello atteso, e tende a diminuire quando si è in presenza di “good news”.>> (Giulia Palomba)

Di seguito presenterò 3 modelli con asimmetria: il modello GARCH Integrato (IGARCH), il modello Exponential GARCH (E-GARCH) ed il modello GARCH-M (GARCH In Mean).

⁴⁸ Volatility clustering nelle serie storiche economiche e finanziarie, Elena Gasparini

3.3.1 IL MODELLO GARCH INTEGRATO

Il modello IGARCH (Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedastic), introdotto da Engle e Bollerslev (1986) parte dalla rappresentazione del modello GARCH e considera il coefficiente della componente autoregressiva come pari a 1. Di fatto quindi, il modello IGARCH si presenta come una condizione particolare del modello GARCH, in quanto $\sum_{i=1}^m \alpha_i + \sum_{j=1}^s \beta_j = 1$; si avrà quindi che il modello IGARCH (1,1) è esattamente pari a:

$$\begin{aligned}\varepsilon_t &= \sigma_t u_t \\ \sigma_t^2 &= \omega + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + (1 - \alpha_1) \varepsilon_{t-1}^2\end{aligned}\quad (3.1)$$

Con β_1 incluso strettamente tra 0 e 1.

Imponendo la somma tra i due coefficienti pari a uno comporta la perdita della proprietà di stazionarietà debole del modello, in quanto la condizione necessaria per avere varianza non condizionata finita era che tale somma fosse strettamente inferiore a 1. “Nel modello IGARCH le informazioni correnti rimangono importanti per previsioni di qualsiasi orizzonte temporale”⁴⁹: si crea una differenza sostanziale dal modello GARCH dato che in quest’ultimo uno shock sulla varianza condizionata ad un certo istante (t) tende ad avere un impatto sempre inferiore sulle previsioni all’aumentare dell’orizzonte temporale considerato (Satchell e Knight, 2011). Questa proprietà fa sì che più una serie finanziaria mostra persistenza elevata nella volatilità più un modello di tipo IGARCH può risultare accurato a descriverla.

Il processo IGARCH è considerabile sotto certe condizioni un processo fortemente stazionario per σ_t^2 sebbene, per le ragioni descritte precedentemente, non possa essere considerato debolmente stazionario vista la mancanza dei primi due momenti (Tsay, 2014).

3.3.2 IL MODELLO EXPONENTIAL GARCH (E-GARCH)

I modelli ARCH e GARCH non sono in grado di prendere in considerazione impatti diversi sulle serie storiche per cambiamenti di prezzi positivi o negativi e, quindi, di considerare la presenza del leverage effect nei mercati azionari: questo deficit ha portato a diverse critiche al modello, ma anche ad alternative che potessero risolvere il problema. L’alternativa presentata da Nelson (1991) prende il nome di Exponential Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity (EGARCH).

“Risponde all’esigenza di dare soluzione al problema dei segni degli errori di previsione che nel GARCH sono elevati al quadrato, rendendo ininfluenza il fatto che essi siano al rialzo o al ribasso”⁵⁰. Il modello assume, a differenza dei precedenti, che sia il logaritmo naturale di σ_t^2 ad essere espresso in funzione dei passati valori di z_t e non la varianza. Questo perché il modello

⁴⁹ “Modelli Per La Previsione Di Serie Storiche Finanziarie”, Steve Cavallin

⁵⁰ Analisi delle serie storiche: modelli ARCH e GARCH, Università degli studi Mediterranea, M. Ferrara

mantiene gli errori con il proprio segno, dando così adeguata spiegazione alla diversa reazione degli operatori alle “buone notizie” e alle “cattive notizie”.

$$\ln \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^m \beta_i \ln \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s (\alpha_j |u_{t-j}| + \gamma_j u_{t-j}) \quad (3.2)$$

dove i parametri ω , α_i e β_i non devono essere necessariamente positivi.

Con riguardo al problema del leverage effect, si può notare subito come u_{t-j} ha effetti diverse a seconda della positività o meno, in quanto con u_{t-j} positivo si avrà un effetto pari a $\alpha_j + \gamma_j$ mentre nel caso opposto un effetto di $\alpha_j - \gamma_j$. “Essendo il segno di ε_t determinato esclusivamente dalla sua componente u_t , questo sta a significare che il modello presenterà effetti diversi a seconda del segno del parametro ε_t ”⁵¹.

Utilizzando il logaritmo, il modello rimuove eventuali vincoli necessari ad assicurare la positività della varianza condizionale e risulta essere un modello più flessibile rispetto ai modelli ARCH e GARCH. La presenza di risposte diverse a shock di segno diverso con questo modello lo porta chiaramente ad essere un modello non-lineare, ponendo ovviamente ω diverso da zero.

3.3.3 IL MODELLO GARCH-IN-MEAN (GARCH-M)

Nei modelli GARCH analizzati fino ad ora si è sempre assunto che la media dei rendimenti (momento primo condizionale) sia sempre costante e uguale a zero, mentre solo il momento secondo condizionale è variabile nel tempo (Palomba, 2004). Per tenere conto della possibilità che i rendimenti di un certo titolo o portafoglio e la rispettiva volatilità siano correlati, è stato elaborato da Engle, Lilien e Robins (1987) il modello GARCH-M, abbreviazione di GARCH-in-Mean (GARCH-In-Media). Il modello presenta una media e una varianza condizionate che variano in modo non lineare in relazione ai valori passati di r_t . “La varianza condizionale entra a determinare la media condizionale del processo determinando premi per il rischio attesi che mutano temporalmente al variare delle diverse volatilità del mercato”⁵².

Un semplice modello GARCH (1,1) -M può essere spiegato così:

$$r_t = \mu + c\sigma_t^2 + \varepsilon_t \quad (3.3)$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t u_t$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 \quad (3.4)$$

Dove μ e c sono costanti. Il parametro c è anche chiamato premio per il rischio: se è positivo indica che c'è correlazione positiva tra rendimenti e volatilità. Alternative a questo modello possono esprimere la varianza anche come $\sqrt{\sigma_t^2}$ oppure come $\ln(\sigma_t^2)$. Dalla formulazione del

⁵¹ “Modelli Per La Previsione Di Serie Storiche Finanziarie”, Steve Cavallin

⁵² Analisi delle serie storiche: modelli ARCH e GARCH, Università degli studi Mediterranea, M. Ferrara

modello GARCH-M si può notare che ci sono delle correlazioni seriali nella serie dei rendimenti r_t , introdotte dal processo della volatilità $\{\sigma_t^2\}$.

CAPITOLO 4 – LA VOLATILITÀ NEI TASSI DI CAMBIO DURANTE I PERIODI DI CRISI INTERNAZIONALI

Dopo aver illustrato teoricamente e matematicamente la volatilità, le serie storiche finanziarie e le loro caratteristiche principali ed i modelli econometrici con cui si può calcolare e stimare la volatilità, in questo capitolo analizzerò i tassi di cambio delle principali valute mondiali (tutte in rapporto con l'Euro) durante il periodo dell'invasione russa in Ucraina. Ho raccolto i dati delle serie storiche delle principali valute dal gennaio 2021 fino a novembre 2023 (quando ho iniziato a svolgere questo elaborato): i dati sui cambi valutari sono dati in serie storiche raccolti settimanalmente (5 giorni su 7) presi dal sito tassidicambio.bancaditalia.it e riguardano i cambi Euro – Dollaro (Usd), Euro – Sterlina (Gpb), Euro – Franco Svizzero (Chf) ed Euro – Yuan (Cny). Per poter analizzare anche il cambio della moneta russa, il Rublo, ho dovuto cambiare valuta ed utilizzare il cambio Dollaro – Rublo poiché i dati del rapporto Euro – Rublo non sono più disponibili dopo l'entrata in guerra della Russia.

Dopo aver spiegato il soggetto della mia analisi procedo a specificare come ho svolto il lavoro, utilizzando il software per analisi econometriche Gretl, ho caricato i dati delle serie storiche dei tassi di cambio (731 unità di osservazione per ogni valuta) e, una volta caricati, ho aggiunto ad ogni serie storica una differenza logaritmica della variabile interessata (nel caso del cambio Euro – Dollaro ho inserito la differenza logaritmica del tasso di cambio Euro – Dollaro). Utilizzando una trasformazione logaritmica è possibile normalizzare una variabile che ha una distribuzione asimmetrica, riducendo gli effetti degli outliers e riuscendo a linearizzare una serie di dati: in questo modo la nuova variabile corrisponde ai rendimenti del tasso di cambio specifico.

Su queste nuove variabili linearizzate ho effettuato vari test per vedere quale modello econometrico fosse in grado di descrivere meglio l'andamento della volatilità, senza sovra o sottostimarla.

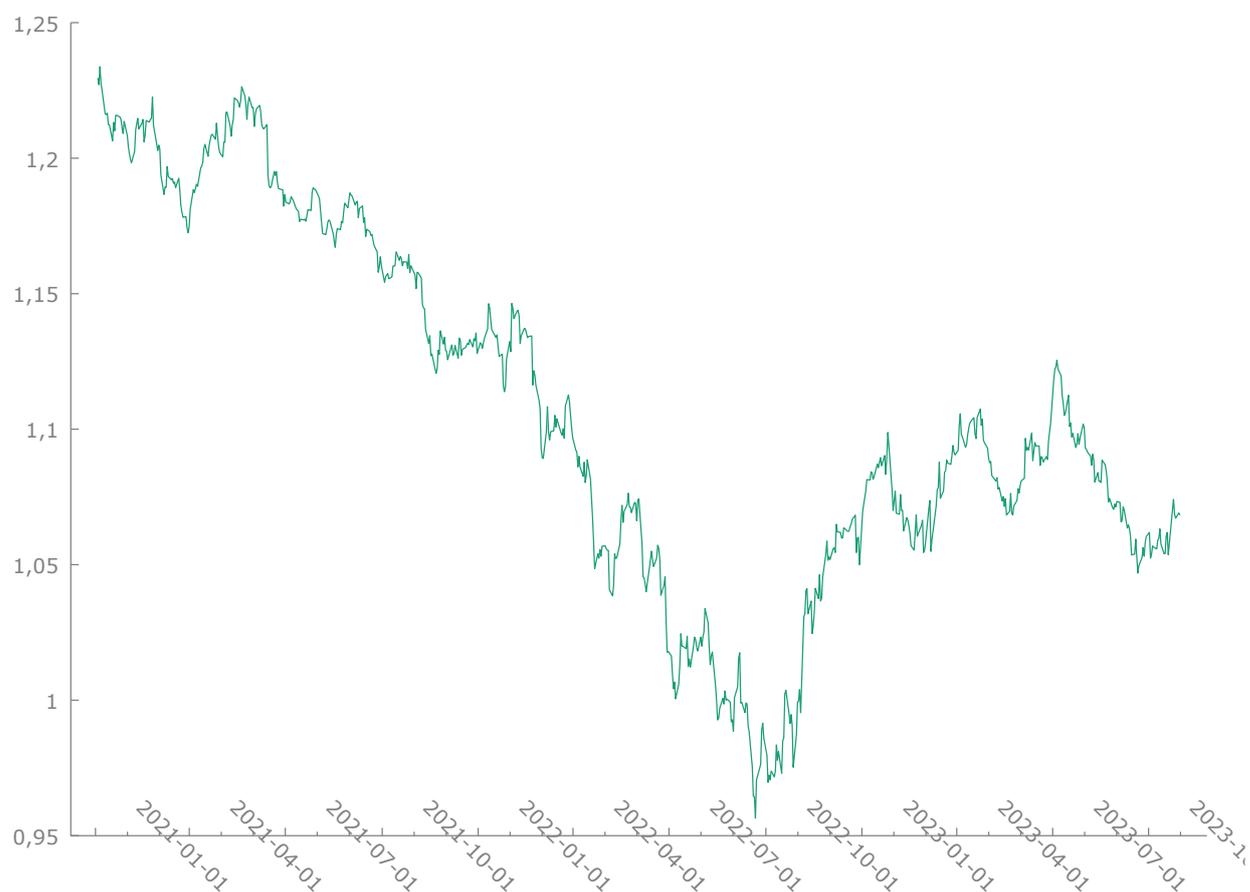
Ricordiamo che i parametri alfa, beta e gamma stanno per:

- α = effetto degli shock recenti
- β = persistenza della volatilità
- γ = asimmetria della volatilità/ effetto leverage

Per comprendere se i valori sono statisticamente significativi si deve guardare il p-value (valore di probabilità): indica il grado di significatività del campione e determina la probabilità di ottenere risultati uguali o meno probabili di quelli osservati durante il test, supponendo come vera l'ipotesi nulla. Un valore di p-value maggiore di 0,05 indica che l'ipotesi campionata è nulla; mentre se il valore del p-value è minore di 0,05, i dati osservati sono statisticamente significativi.

Nei test per verificare quale fosse il modello più appropriato ho utilizzato due tipi diversi di distribuzione: la distribuzione normale (gaussiana) e la distribuzione *student's t* (più comunemente chiamata distribuzione t). La distribuzione t è simile alla distribuzione normale, ma ha code più spesse, ed è parametrizzata da un parametro chiamato gradi di libertà, che dipende dalla dimensione del campione. Quando i gradi di libertà sono grandi, la distribuzione t si avvicina sempre di più alla distribuzione normale. Avendo le serie storiche finanziarie delle code spesse come caratteristica, la distribuzione t è quella più appropriata da utilizzare nei modelli GARCH ed EGARCH poiché in grado di descrivere la volatilità in maniera consona senza commettere errori di sottostima o sovrastima: questo verrà illustrato nel seguente paragrafo.

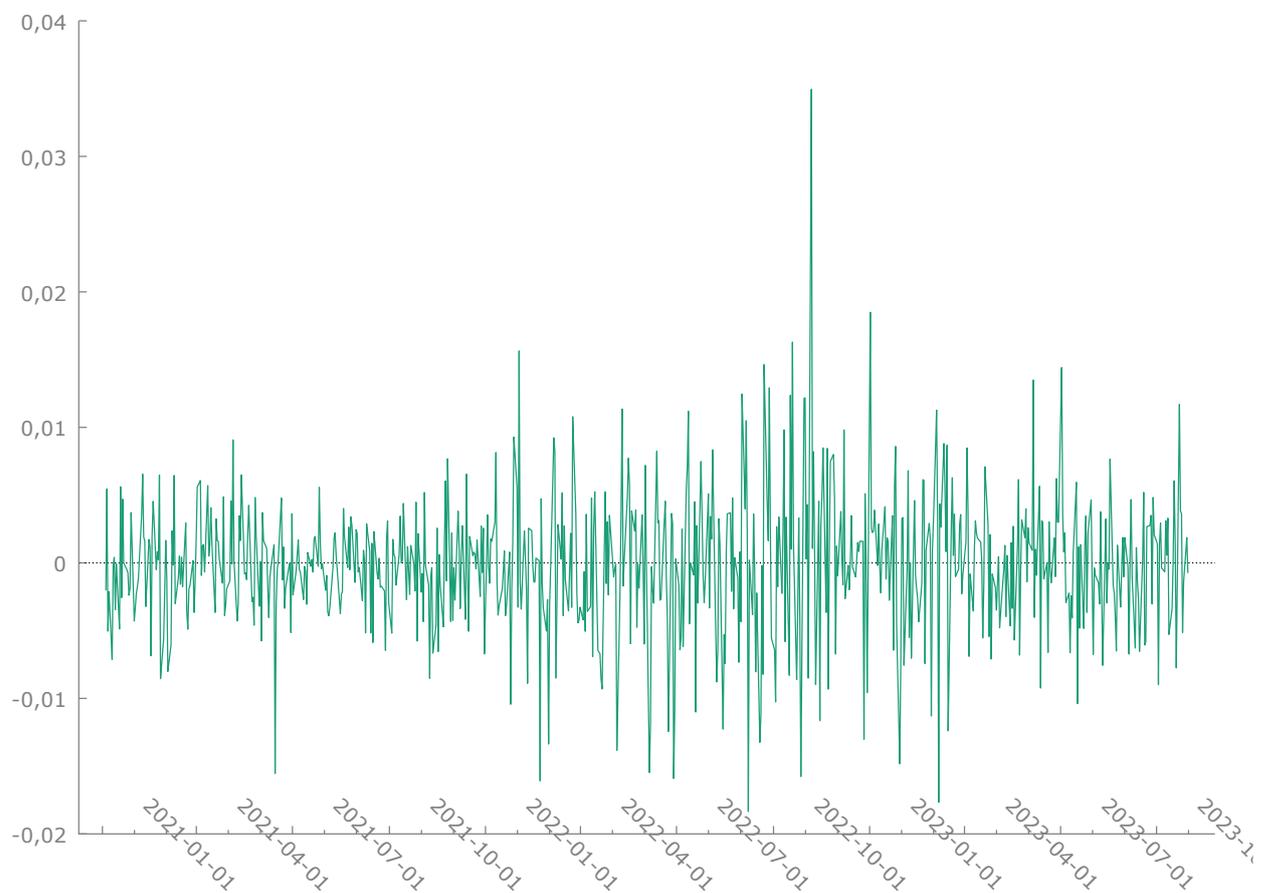
4.1 IL CAMBIO EURO – DOLLARO



Da questo primo grafico si riesce subito a comprendere come il rapporto Euro – Dollaro sia andato in calando nel corso di questi due anni: la serie storica raggiunge il suo punto di picco al primo giorno di osservazione (04/01/2021) col valore di 1,2296 e poi crolla, fino ad arrivare

ad un punto di minimo il 22/09/2022 toccando lo 0,9565. Come si può facilmente dedurre dall'immagine il tasso di cambio riacquista valore e si riassetta intorno ad 1,05.

Spostiamo ora l'attenzione sul grafico della serie storica dei rendimenti di questo tasso di cambio (quindi con l'aggiunta delle differenze logaritmiche della variabile Eur_Usd). Il grafico mostra chiaramente come la volatilità di questa serie storica non presenti anomalie: tiene quasi sempre i suoi valori ancorati tra il -0,015 e lo 0,015, con un solo picco anomalo che raggiunge lo 0,035. Si vede chiaramente come la serie storica sia leptocurtica: la distribuzione stimata dal modello è pari a 4,2 (maggiore di 3 quindi è effettivamente corretta come spiegato nel capitolo dei fatti stilizzati).



Successivamente all'analisi dei grafici della serie storica del cambio Euro – Dollaro, ho svolto dei test per vedere quale modello fosse più accurato nel descrivere l'andamento della volatilità. Ho iniziato con un semplice modello GARCH (1,1) con distribuzione gaussiana:

Model: GARCH(1,1) [Bollerslev] (Normal) *
 Dependent variable: ld_Eur_Usd
 Sample: 2021-01-05 -- 2023-10-31 (T = 736), VCV method: Robust

Conditional mean equation

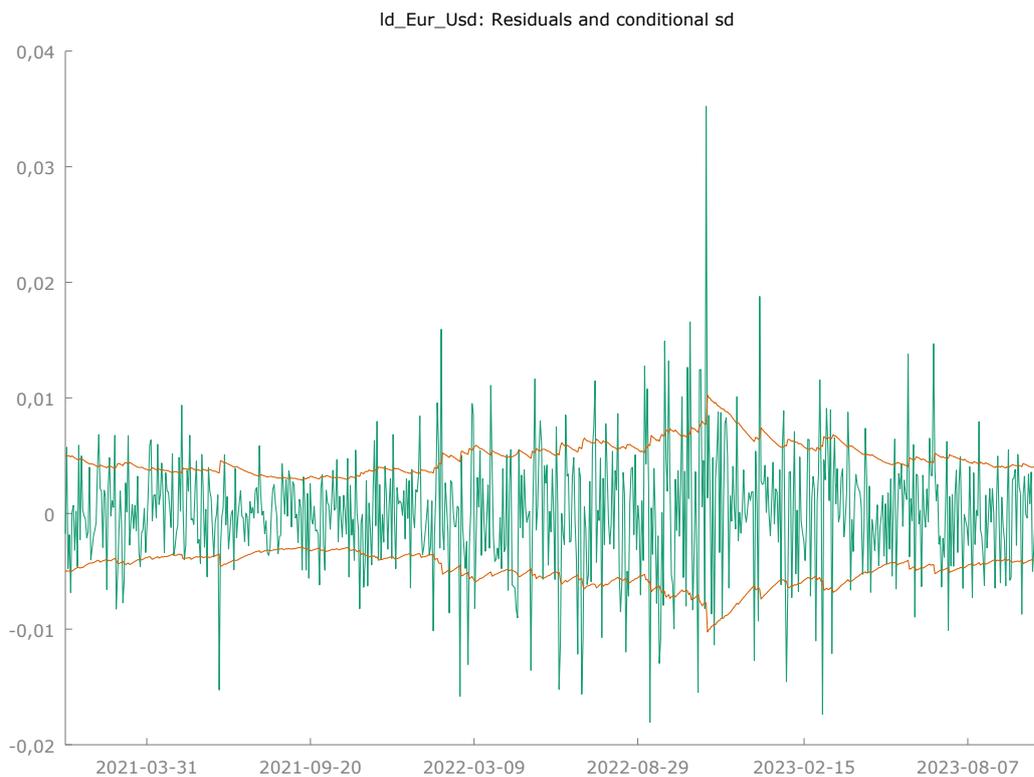
	coefficiente	errore std.	z	p-value
const	-0,000283466	0,000157529	-1,799	0,0719 *

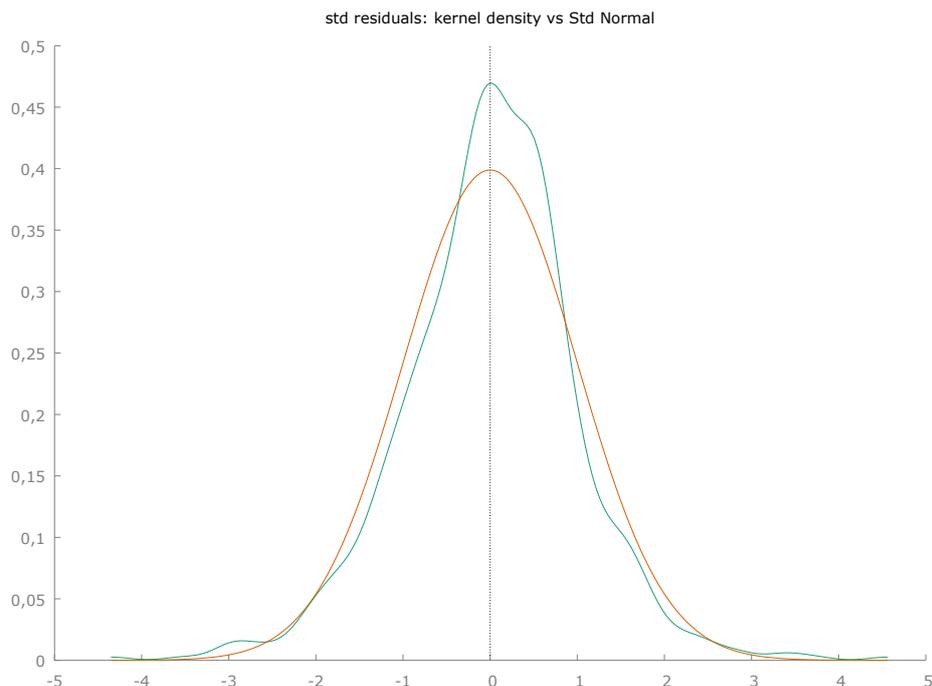
Conditional variance equation

	coefficiente	errore std.	z	p-value
omega	1,32423e-07	1,18180e-07	1,121	0,2625
alpha	0,0385768	0,0135974	2,837	0,0046 ***
beta	0,957055	0,0137996	69,35	0,0000 ***

Llik: 2899,52111 AIC: -5791,04222
 BIC: -5772,63730 HQC: -5783,94417

Il modello fa capire che i parametri riguardanti gli effetti degli shock recenti (α) e la persistenza della volatilità (β) sono statisticamente significativi perché i relativi p - value sono minori di 0,05 e la verosimiglianza raggiunge un valore di 2899,521.





Nonostante questo, la stima della volatilità è ancora lontana dalla realtà: i grafici fanno notare benissimo come il modello in questione abbia sottostimato l'andamento della volatilità. Per questo motivo è stato necessario svolgere un test ulteriore, cambiando modello e passando al modello EGARCH (1,1), sempre con distribuzione gaussiana.

Model: EGARCH(1,1) [Nelson] (Normal)
 Dependent variable: ld_Eur_Usd
 Sample: 2021-01-05 -- 2023-10-31 (T = 736), VCV method: Robust

Conditional mean equation

	coefficiente	errore std.	z	p-value
const	-0,000319407	0,000169992	-1,879	0,0603 *

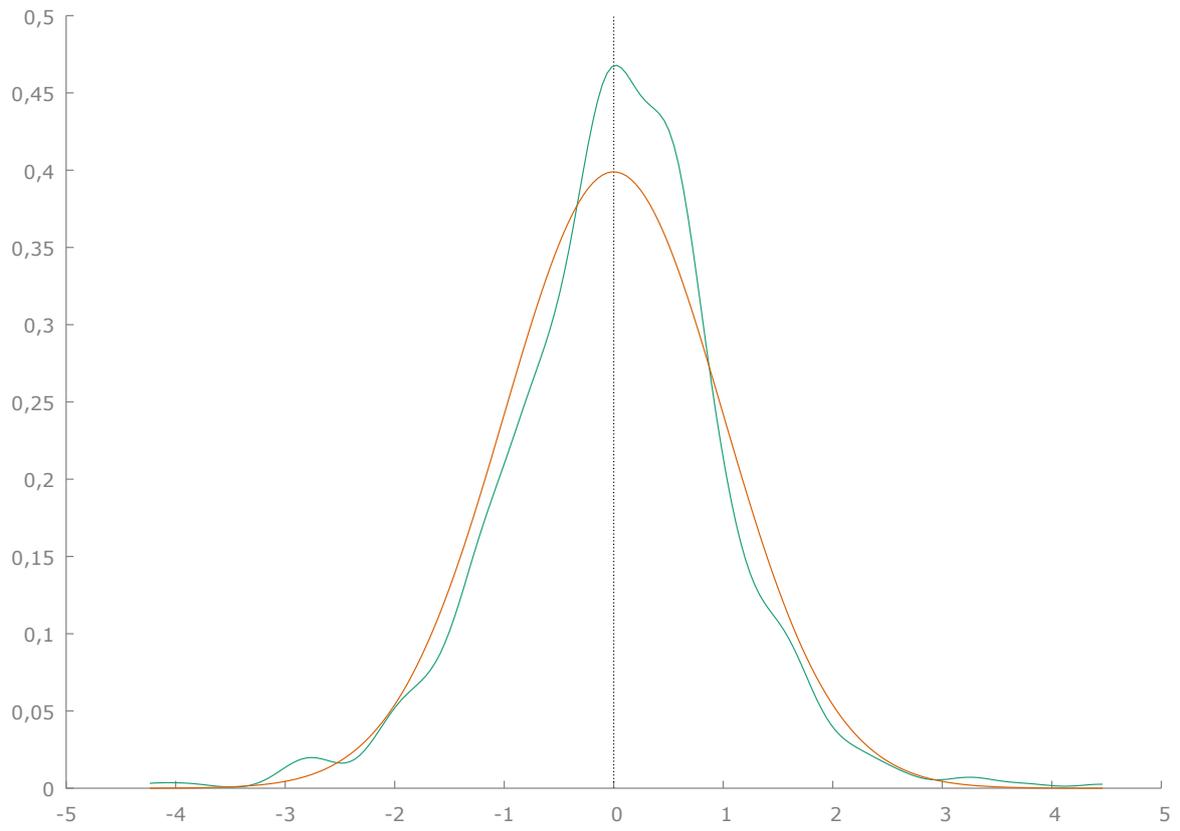
Conditional variance equation

	coefficiente	errore std.	z	p-value
omega	-0,112961	0,0679624	-1,662	0,0965 *
alpha	0,0872207	0,0293988	2,967	0,0030 ***
gamma	-0,00970148	0,0273927	-0,3542	0,7232
beta	0,995532	0,00552927	180,0	0,0000 ***

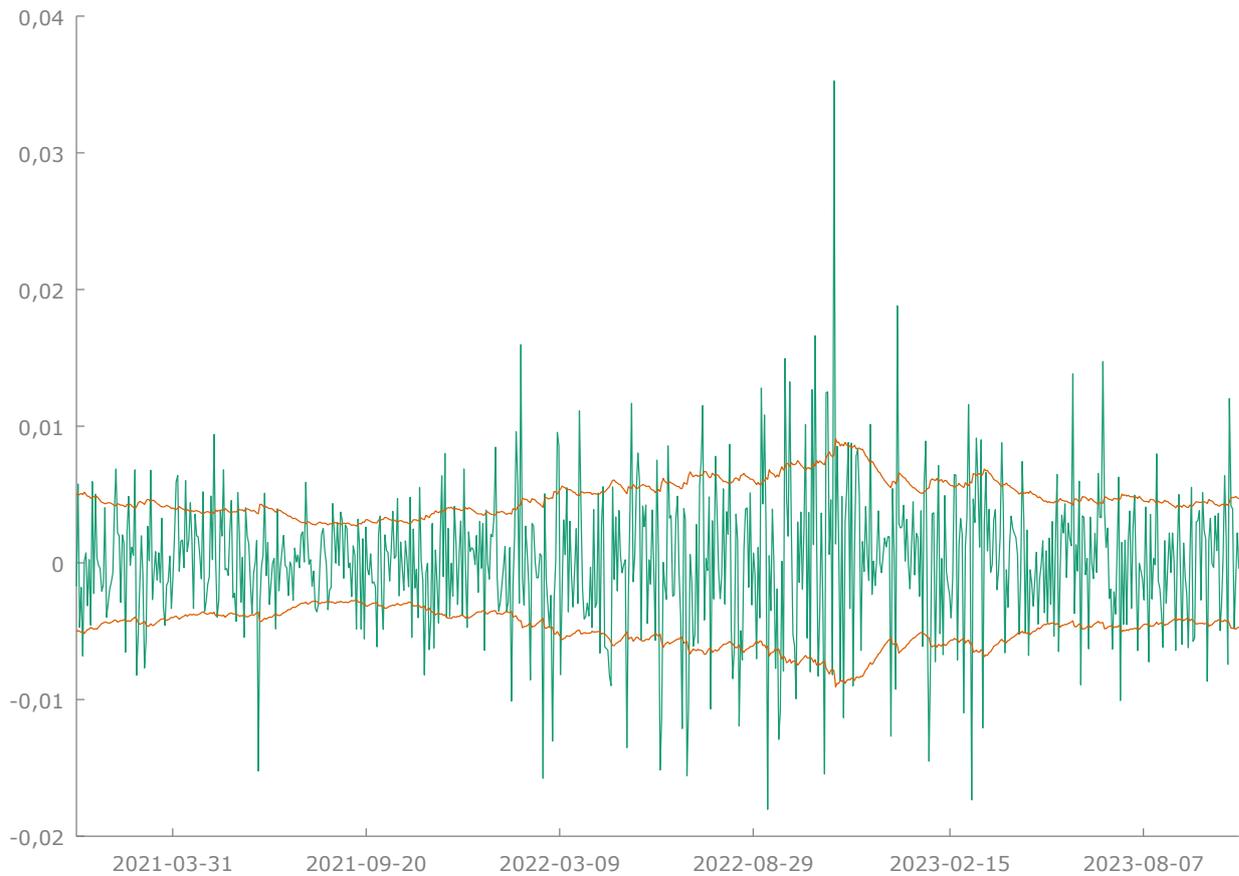
Llik: 2902,87579 AIC: -5795,75157
 BIC: -5772,74542 HQC: -5786,87901

Il modello EGARCH (1,1) ha portato dei miglioramenti: prima di tutto ci fa capire come non ci sia un effetto leverage; in secondo luogo, ha aumentato il valore di verosimiglianza della serie storica che è arrivata a 2902,875. Vediamo ora se il modello EGARCH (1,1) ha portato migliorie anche nella descrizione dell'andamento della volatilità.

std residuals: kernel density vs Std Normal



ld_Eur_Usd: Residuals and conditional sd



Sembra essere migliorata di poco ma ancora non basta: il modello sottostima ancora di troppo l'andamento della volatilità. È necessario cambiare il tipo di distribuzione e passare alla distribuzione t, prima con il modello GARCH e poi con il modello EGARCH.

Model: GARCH(1,1) [Bollerslev] (Student's t)*
 Dependent variable: ld_Eur_Usd
 Sample: 2021-01-05 -- 2023-10-31 (T = 736), VCV method: Robust

Conditional mean equation

	coefficiente	errore std.	z	p-value
const	-0,000194735	0,000150206	-1,296	0,1948

Conditional variance equation

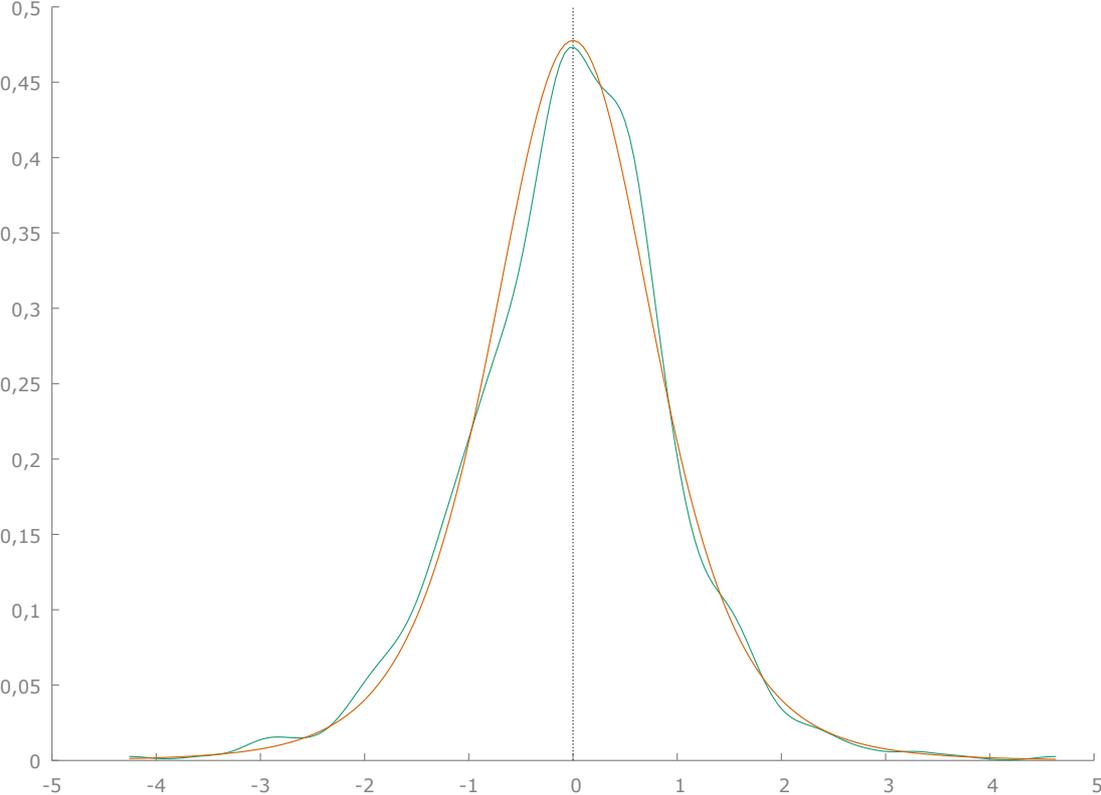
	coefficiente	errore std.	z	p-value
omega	1,54669e-07	1,22785e-07	1,260	0,2078
alpha	0,0339703	0,0106440	3,191	0,0014 ***
beta	0,960846	0,0124880	76,94	0,0000 ***

Conditional density parameters

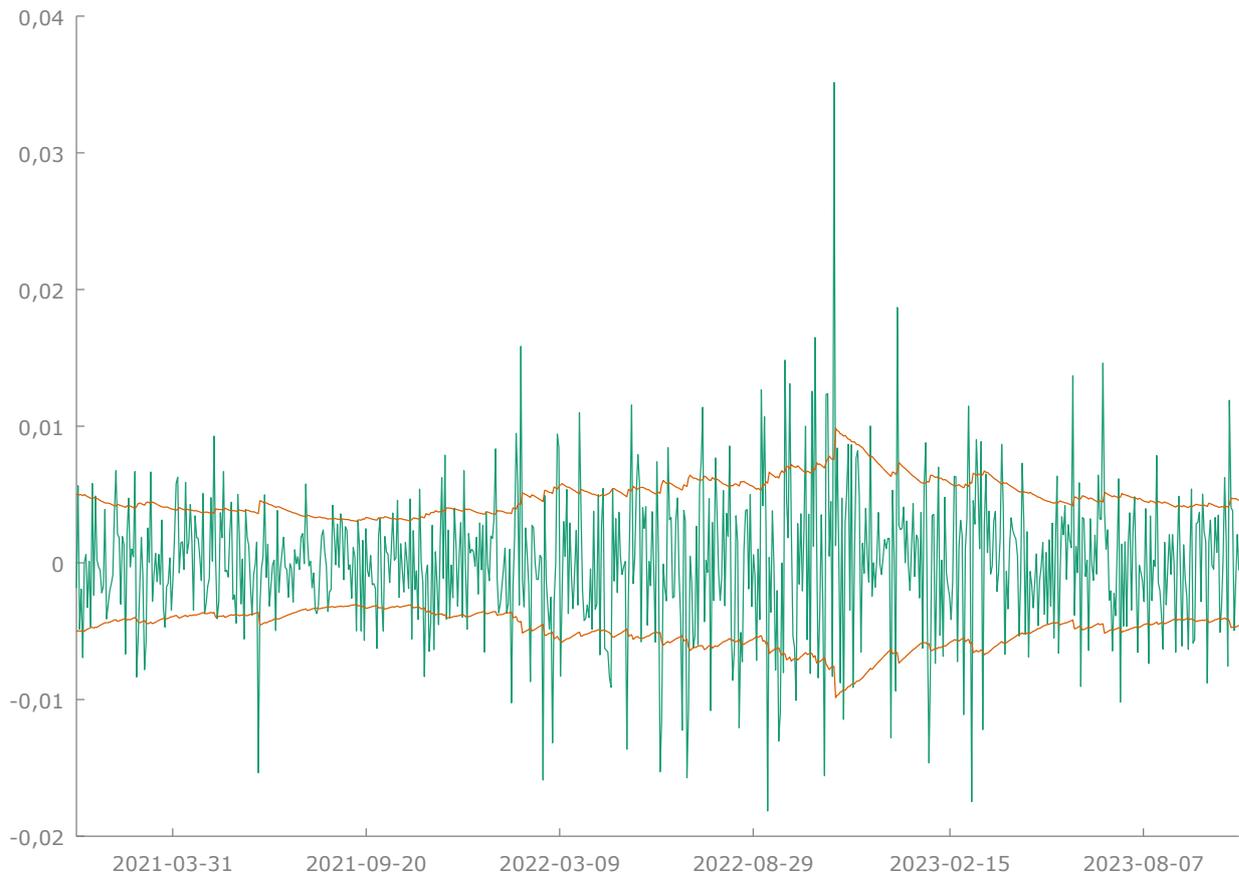
	coefficiente	errore std.	z	p-value
ni	5,51332	1,06172	5,193	2,07e-07 ***

Llik: 2919,07143 AIC: -5828,14285
 BIC: -5805,13670 HQC: -5819,27029

std residuals: kernel density vs t(5,51332)



ld_Eur_Usd: Residuals and conditional sd



La distribuzione t aumenta notevolmente il valore di verosimiglianza delle serie storica, che passa da 2902 a 2919 e, inoltre, riesce a descrivere correttamente l'andamento della volatilità: non ci sono né sottostime né sovrastime ed il modello è quello adatto. Per avere ancora più certezze proviamo a vedere se utilizzando il modello EGARCH cambia qualcosa.

Model: EGARCH(1,1) [Nelson] (Student's t)
 Dependent variable: ld_Eur_Usd
 Sample: 2021-01-05 -- 2023-10-31 (T = 736), VCV method: Robust

Conditional mean equation

	coefficiente	errore std.	z	p-value	
const	-0,000251090	0,000114195	-2,199	0,0279	**

Conditional variance equation

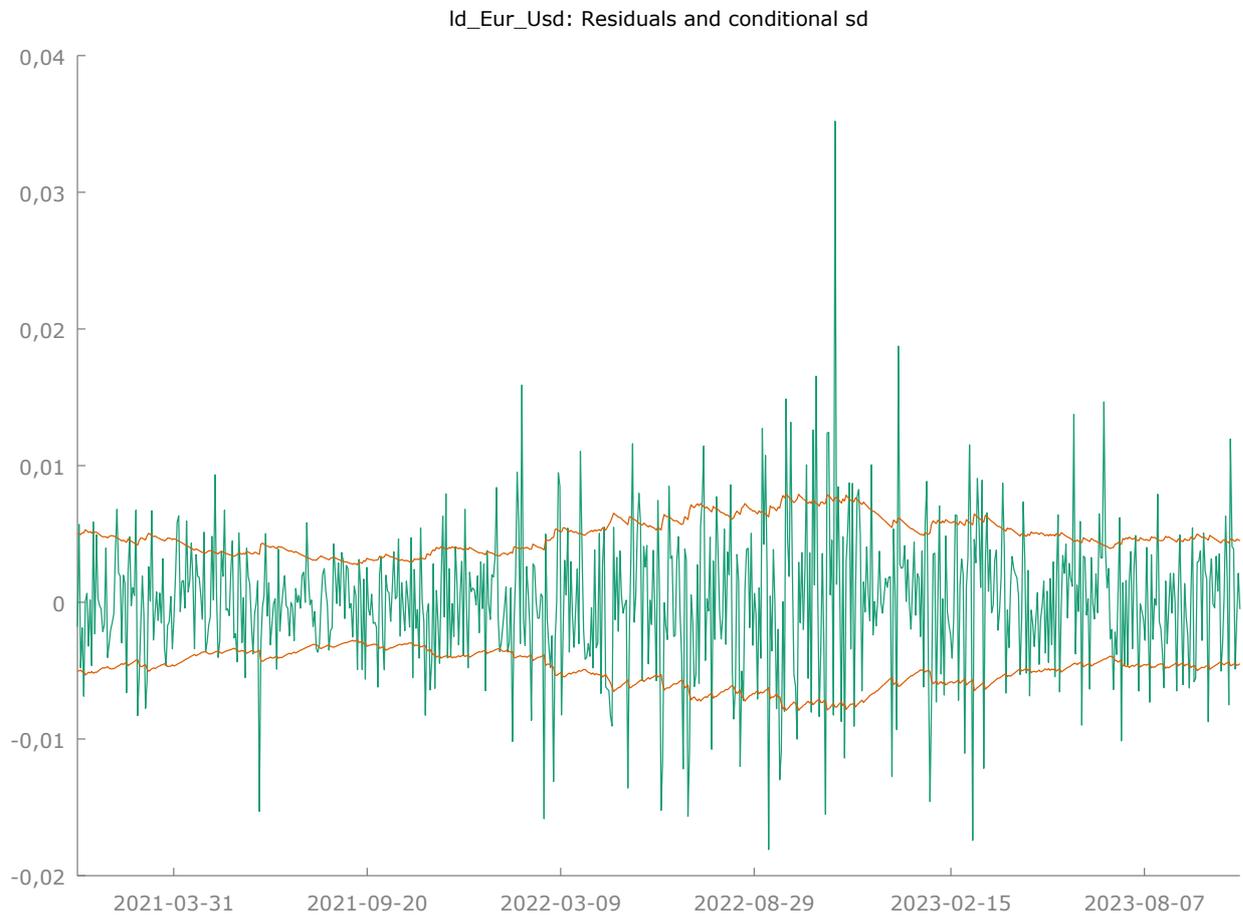
	coefficiente	errore std.	z	p-value	
omega	-0,0500063	0,0568984	-0,8789	0,3795	
alpha	0,0537646	0,0226540	2,373	0,0176	**
gamma	-0,0442215	0,0223391	-1,980	0,0478	**
beta	0,999055	0,00423621	235,8	0,0000	***

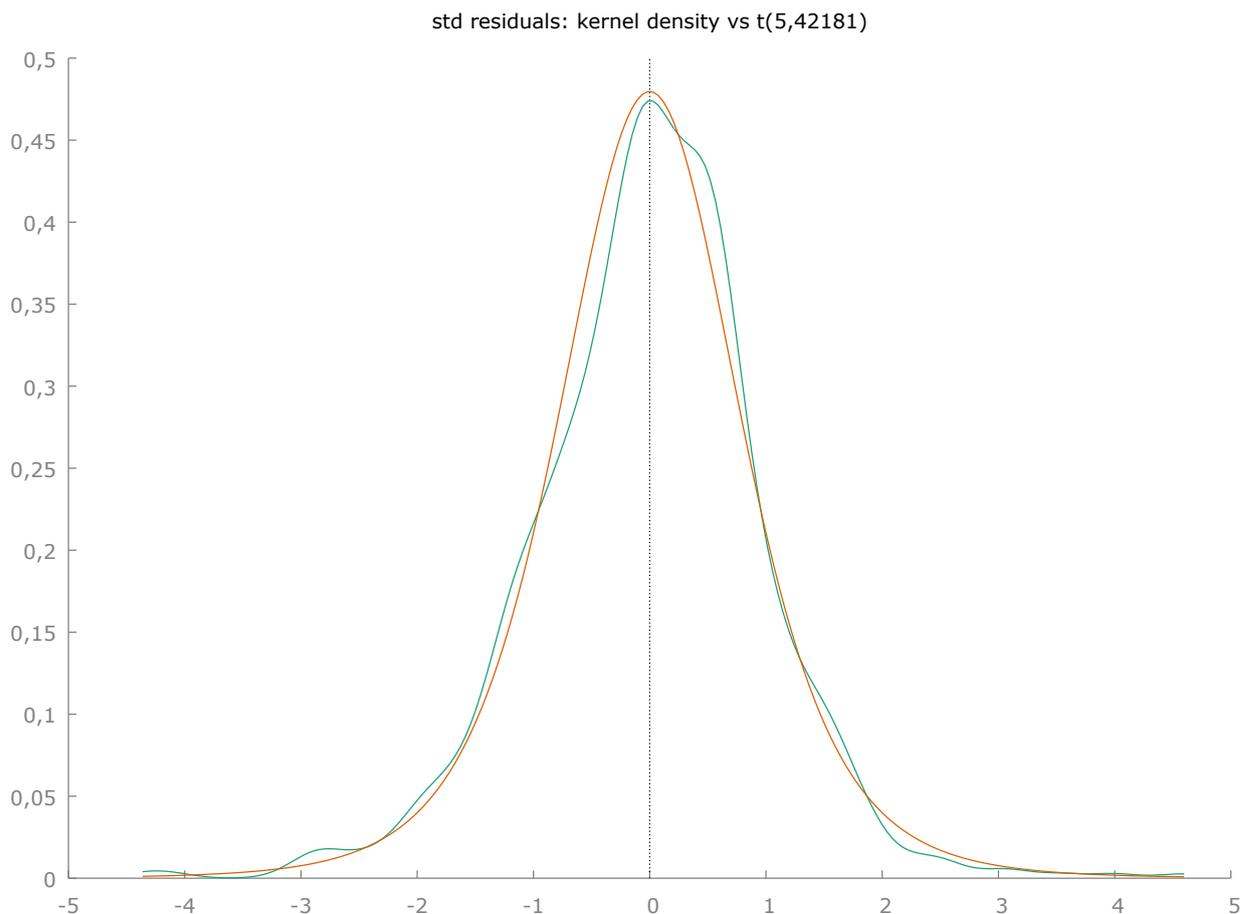
Conditional density parameters

	coefficiente	errore std.	z	p-value	
ni	5,42181	1,08523	4,996	5,85e-07	***

Llik: 2922,77523 AIC: -5833,55046
 BIC: -5805,94308 HQC: -5822,90339

Il modello EGARCH (1,1) con distribuzione t aumenta ancora di più il valore di verosimiglianza e, inoltre, il parametro gamma (asimmetria o effetto leva) diventa statisticamente significativo.



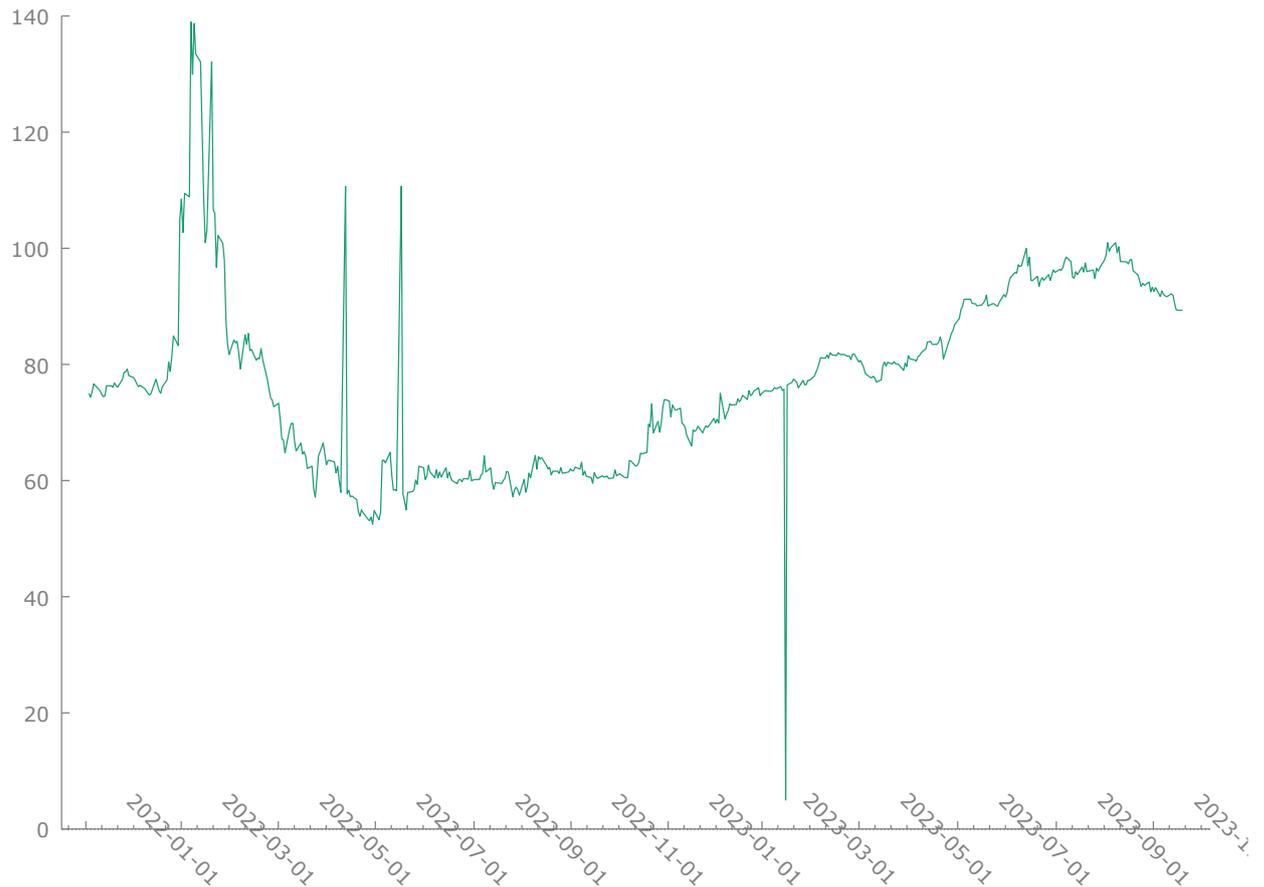


Con l'aiuto dei grafici tutti diventa ancora più chiaro: il modello EGARCH (1,1) con distribuzione t è il modello migliore per comprendere l'andamento della volatilità e la densità della distribuzione della serie storica finanziaria riguardante il tasso di cambio Euro – Dollaro. Ho svolto molti test provando anche ad aggiungere eventuali ritardi significativi o aumentando i pesi del modello (quindi facendolo passare da un modello GARCH 1,1 ad un modello 3,3) e, sì, ovviamente il valore della verosimiglianza cresce ma più aumentano i pesi, più c'è il rischio che il modello sovrastimi o sottostimi sia l'andamento della volatilità che la densità della distribuzione. Per questo motivo non vengono presentati tali casistiche all'interno di questo capitolo.

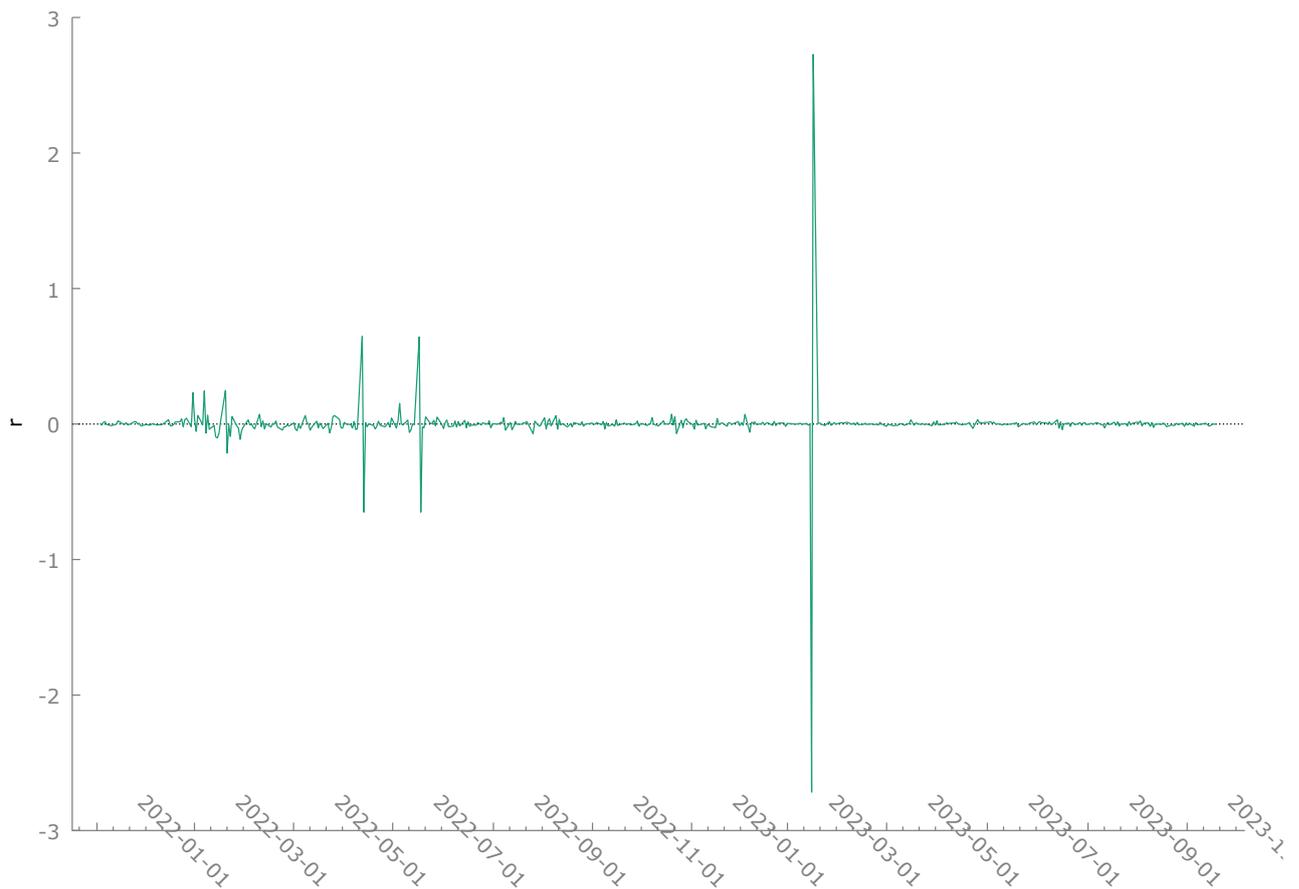
Continuando, verrà dato per vero (come dimostrato in questo capitolo) che la distribuzione t sia in grado di dare una maggiore verosimiglianza alla serie storica quindi, nei prossimi paragrafi, verranno utilizzati solo modelli GARCH ed EGARCH con distribuzione t.

4.2 IL CAMBIO DOLLARO – RUBLO

Questo è sicuramente il caso studio più interessante: il rublo è stato fortemente scosso dallo scoppio della guerra con l'Ucraina, di fatti non è stato possibile recuperare i dati mantenendo l'euro come valuta di cambio fissa poiché questo valore non è attualmente disponibile.



Dal grafico è facilmente osservabile come per studiare il valore del rublo sia stato obbligatorio ridurre il campione di dati di un anno: nel caso studio del cambio Euro – Dollaro, i dati sono stati osservati dal 4 gennaio 2021; in questo caso, per poter comprendere le oscillazioni che ci sono state nel cambio Dollaro – Rublo si è dovuto osservare dal gennaio 2022, questo a causa delle forti anomalie visibili nel grafico. Inserendo la differenza logaritmica della variabile Usd_Rub per avere i rendimenti della variabile Usd_Rub , il risultato è stato il seguente:



Due picchi anomali nei due segni opposti (uno positivo ed uno negativo) e nessuna possibilità di riuscire a comprendere le oscillazioni della volatilità. Per poter studiare il comportamento della volatilità è stato necessario inserire un blocco nel modello: essendo i picchi troppo elevati per essere calcolati, ho dovuto inserire due estremi (0,2 e -0,2). Utilizzando questi due blocchi è stato possibile ricostruire l'andamento della volatilità ed è stato permesso al modello di fare una stima del suo andamento. Prima di arrivare al valore di 0,2 e -0,2 ho svolto due test con i valori di (1 e -1) e (0,5 e -0,5) ma nemmeno con queste due misure è stato possibile catturare le oscillazioni.

Model: GARCH(1,1) [Bollerslev] (Student's t)*
 Dependent variable: r02
 Sample: 2022-01-03 -- 2023-11-20 (T = 491), VCV method: Robust

Conditional mean equation

	coefficiente	errore std.	z	p-value
const	0,000456699	0,000607112	0,7522	0,4519
AR1	-0,259804	0,0483213	-5,377	7,59e-08 ***

Conditional variance equation

	coefficiente	errore std.	z	p-value
omega	7,09129e-05	5,36224e-05	1,322	0,1860
alpha	0,621976	0,394380	1,577	0,1148
beta	0,663953	0,0858161	7,737	1,02e-014 ***

Conditional density parameters

	coefficiente	errore std.	z	p-value
ni	2,43786	0,351681	6,932	4,15e-012 ***
Llik:	1220,82532	AIC: -2429,65064		
BIC:	-2404,47198	HQC: -2419,76293		

Il modello GARCH (1,1) con distribuzione t rende statisticamente significativo il parametro β e porta il valore di verosimiglianza a 1220, 82. Se proviamo a metterlo in paragone con un modello GARCH (1,1) a distribuzione gaussiana vediamo come non ci sia paragone tra i due modelli.

Model: GARCH(1,1) [Bollerslev] (Normal)*
 Dependent variable: r02
 Sample: 2022-01-03 -- 2023-11-20 (T = 491), VCV method: Robust

Conditional mean equation

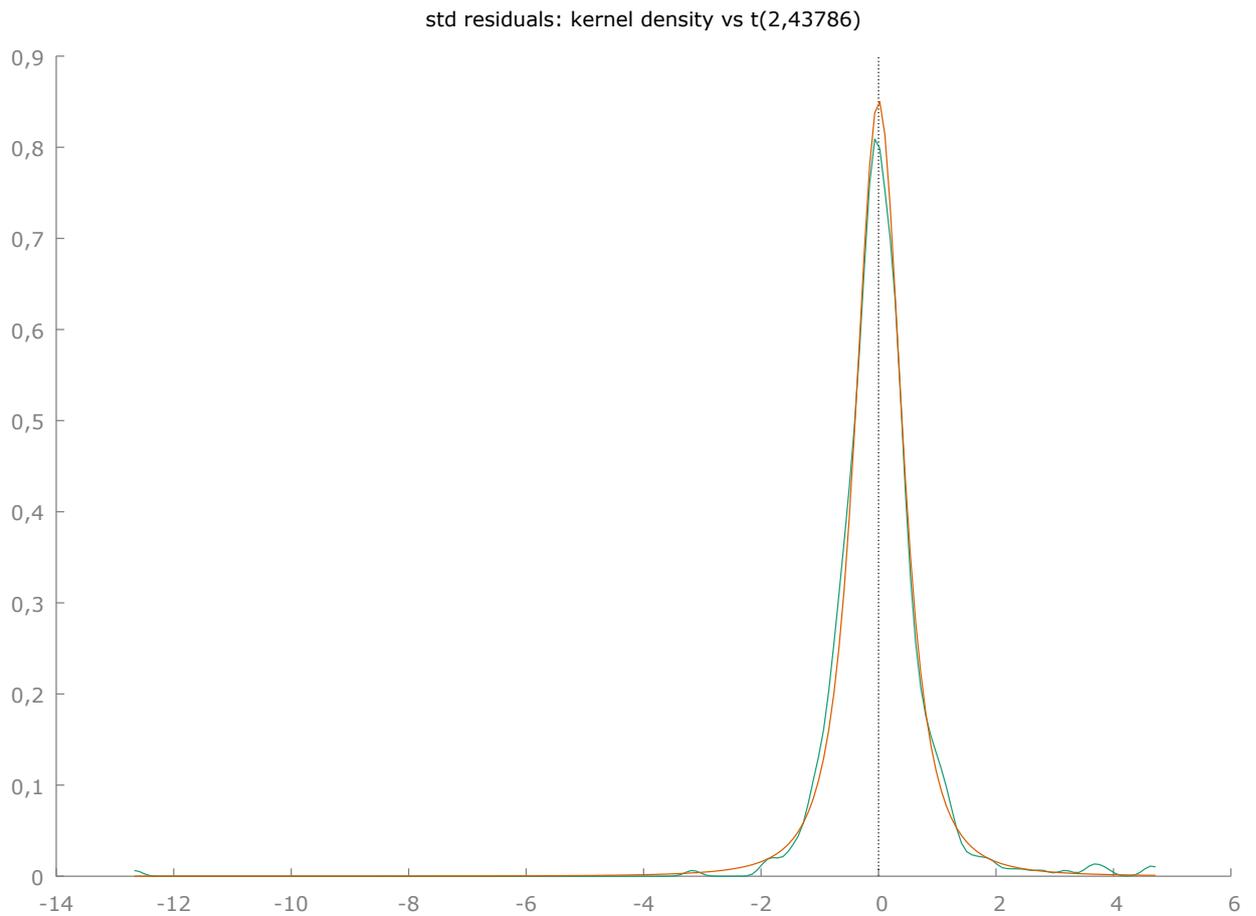
	coefficiente	errore std.	z	p-value
const	0,00141799	0,00115356	1,229	0,2190

Conditional variance equation

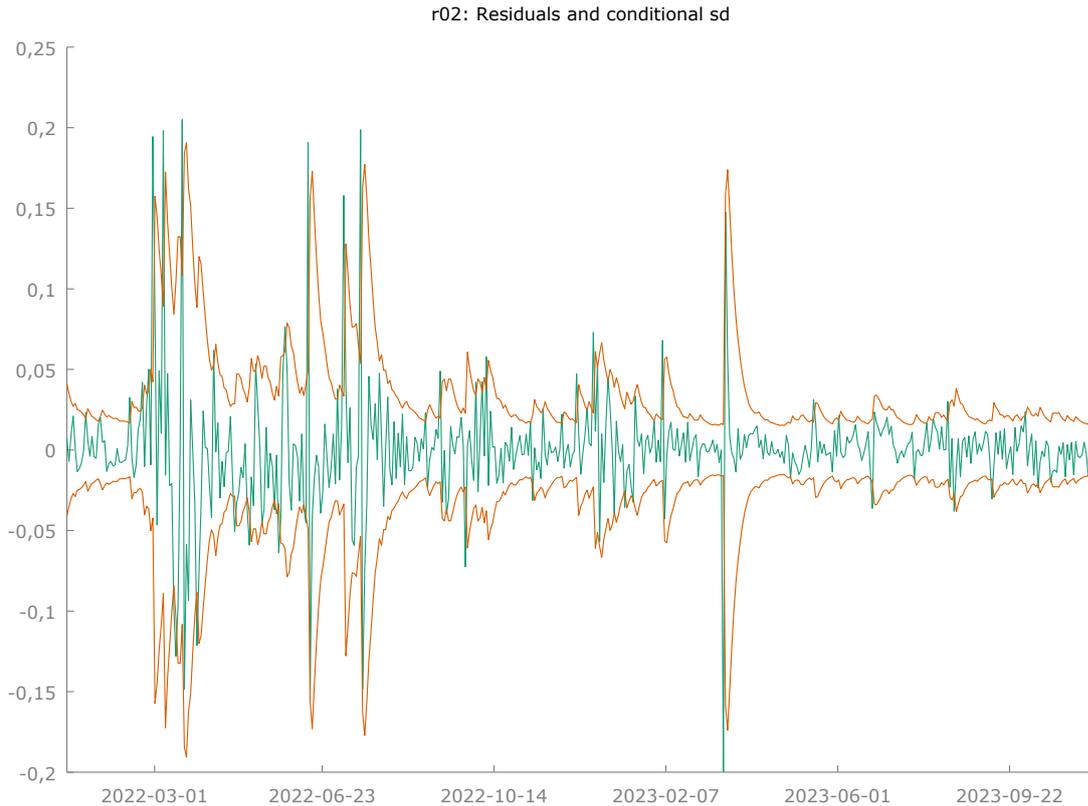
	coefficiente	errore std.	z	p-value
omega	0,000138126	8,94563e-05	1,544	0,1226
alpha	0,421896	0,196932	2,142	0,0322 **
beta	0,582395	0,0997896	5,836	5,34e-09 ***

Llik: 1049,15217 AIC: -2090,30433
 BIC: -2073,51856 HQC: -2083,71253

Ci sono circa 170 punti di differenza tra i due valori di verosimiglianza. Passando ora ai grafici vediamo come il modello GARCH (1,1) con distribuzione t riesca a non sovra o sottostimare l'andamento della volatilità e la densità della distribuzione.



La densità della distribuzione è perfettamente in linea con quella corrente, viene sovrastimata di poco ma è sicuramente uno dei migliori risultati ottenuti.



Purtroppo, la volatilità viene ancora sovrastimata dal modello, poiché è praticamente sempre superiore ad r_t , mentre questa cosa dovrebbe avvenire solo nei due terzi dei casi.

Ho effettuato altri tentativi aggiungendo altri due blocchi: uno a 0.15 e uno a 0.1. Con l'ulteriore inserimento di questi blocchi proverò a vedere se il modello sarà in grado di non sovrastimare la volatilità, altrimenti rimarcherò questa limitazione che, con i blocchi a 0.2, il modello non è riuscito a superare.

Model: GARCH(1,1) [Bollerslev] (Student's t)*
 Dependent variable: r04
 Sample: 2022-01-03 -- 2023-11-20 (T = 491), VCV method: Robust

Conditional mean equation

	coefficiente	errore std.	z	p-value
const	0,000452818	0,000608726	0,7439	0,4570

Conditional variance equation

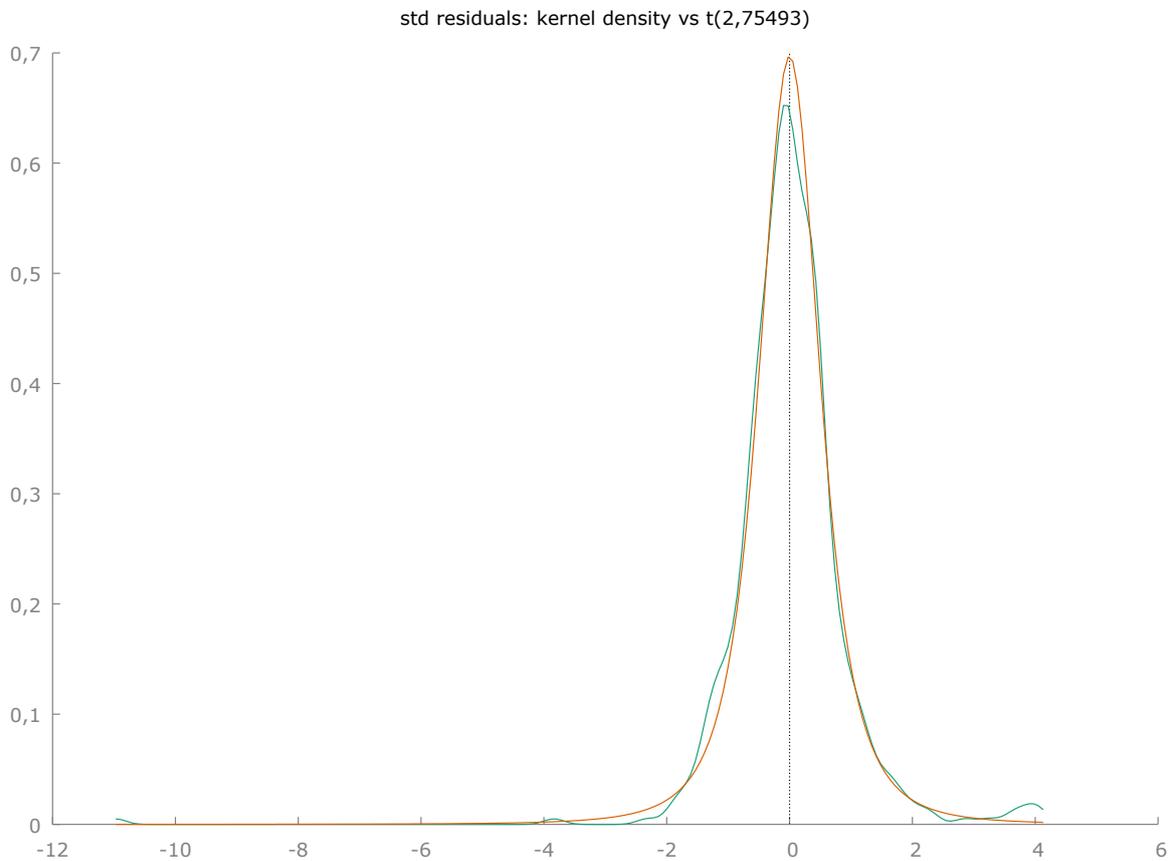
	coefficiente	errore std.	z	p-value
omega	5,45334e-05	3,42516e-05	1,592	0,1114
alpha	0,547387	0,262123	2,088	0,0368 **
beta	0,630030	0,125473	5,021	5,13e-07 ***

Conditional density parameters

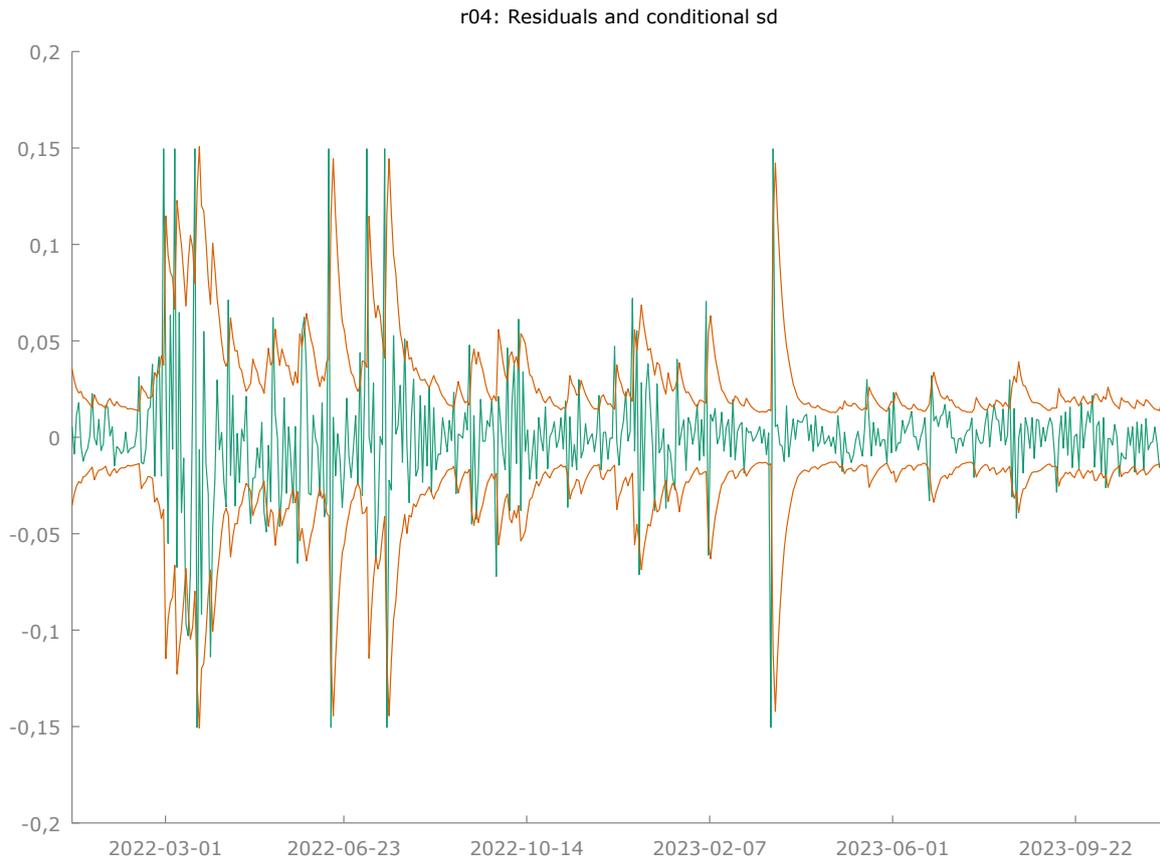
	coefficiente	errore std.	z	p-value
ni	2,75493	0,410196	6,716	1,87e-011 ***

Llik: 1217,00934 AIC: -2424,01869
 BIC: -2403,03647 HQC: -2415,77893

Il modello GARCH (1,1) con l'aggiunta del blocco a 0.15 rimarca come α e β siano parametri statisticamente significativi per il loro p-value e quindi è evidente come gli shock recenti influiscano sul tasso. Anche il valore della verosimiglianza sale a 1217 e migliora rispetto al risultato precedente.



La stima della densità della distribuzione rimane pressoché invariata rispetto al livello precedente: diminuisce il valore perché il range è più basso ma rimane ancora perfettamente in linea con la distribuzione reale.



Il modello GARCH (1,1) migliora di netto la stima dell'andamento della volatilità: con il blocco a 0.15 riesce sicuramente a ricostruire in miglior modo l'andamento reale, diventando il miglior risultato ottenuto ma, purtroppo, non è ancora abbastanza. Ci sono alcune oscillazioni che il modello non riesce a seguire e quindi sovrastima il periodo successivo al picco. Tentiamo ora con la riduzione del blocco da 0.15 a 0.1.

Model: GARCH(1,1) [Bollerslev] (Student's t)*
 Dependent variable: r05
 Sample: 2022-01-03 -- 2023-11-20 (T = 491), VCV method: Robust

Conditional mean equation

	coefficiente	errore std.	z	p-value
const	0,000450997	0,000610067	0,7393	0,4598

Conditional variance equation

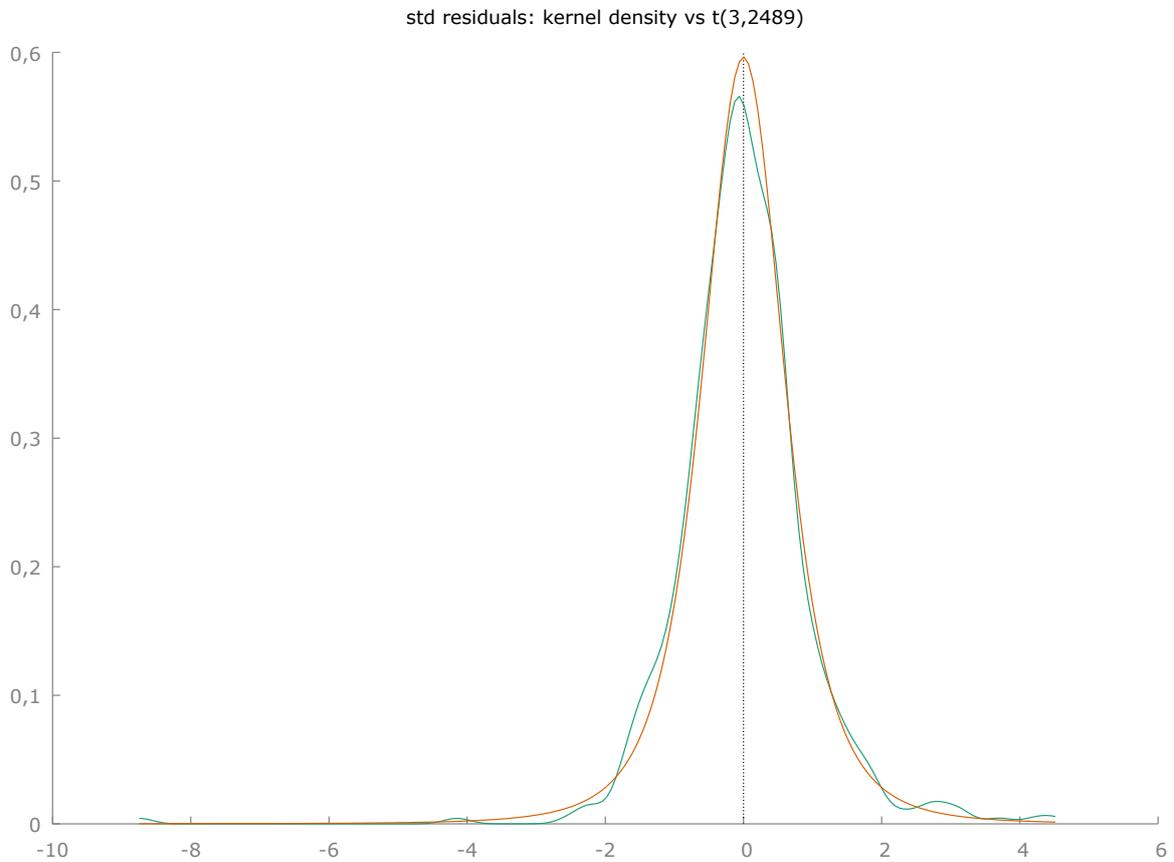
	coefficiente	errore std.	z	p-value	
omega	3,06902e-05	1,66703e-05	1,841	0,0656	*
alpha	0,390033	0,139674	2,792	0,0052	***
beta	0,684691	0,0909538	7,528	5,16e-014	***

Conditional density parameters

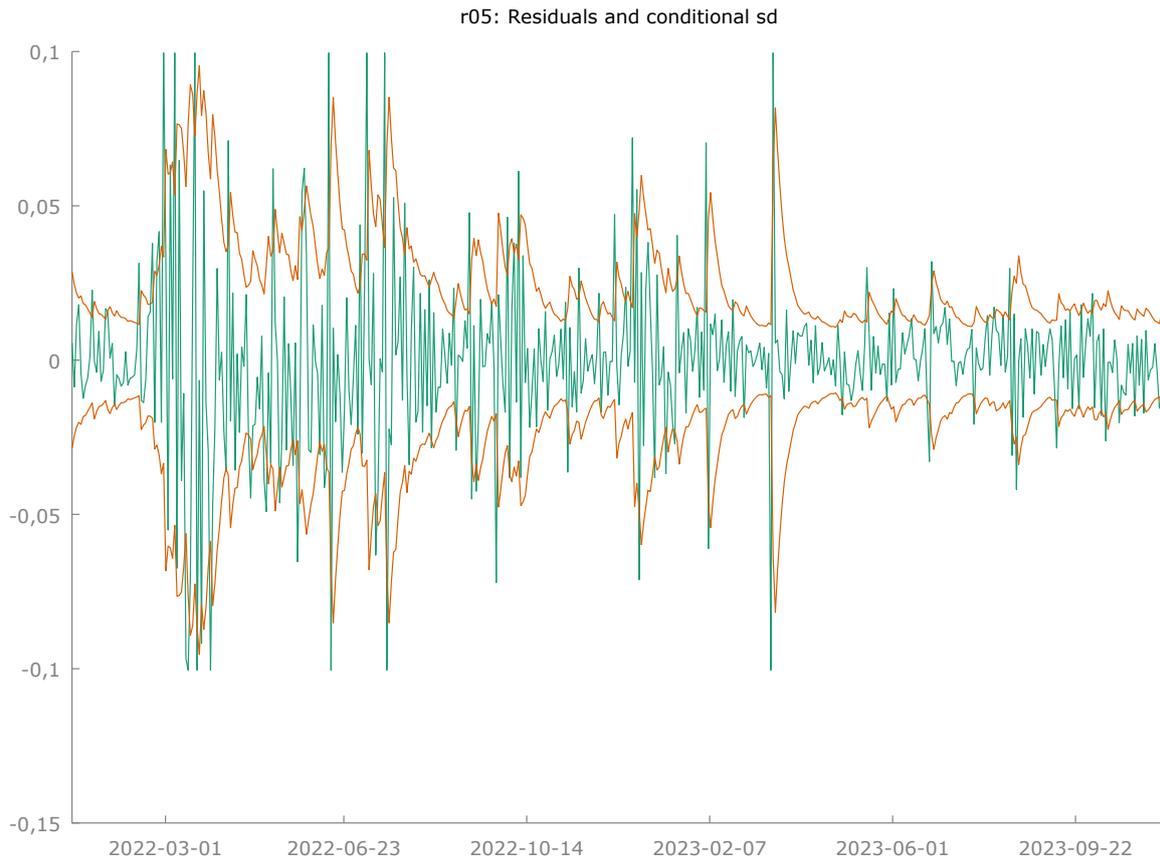
	coefficiente	errore std.	z	p-value	
ni	3,24890	0,537316	6,047	1,48e-09	***

Llik: 1234,52028 AIC: -2459,04056
 BIC: -2438,05834 HQC: -2450,80081

Il risultato del modello dà molta fiducia: il valore della verosimiglianza si è alzato ancora e si assesta a 1234,52 e conferma la significatività degli effetti degli shock recenti e dell'effetto leva.



La stima della densità della distribuzione continua ad essere sugli standard precedenti: il modello riesce a sovrastimarla di poco e segue la linea della distribuzione reale.



In questo caso, il modello GARCH (1,1) con limite a 0.1 riesce a gestire meglio le oscillazioni centrali rispetto al modello GARCH (1,1) con limite a 0.15 ma pecca nel punto iniziale dell'intervallo di tempo poiché sottostima la volatilità: si può vedere benissimo come il modello non riesca a seguire il trend il quale fuoriesce sempre dalla zona arancione.

In conclusione, il modello GARCH riesce ad analizzare egregiamente le cause che influiscono sul tasso di cambio delle valute, evidenziando molto bene quanto i parametri α (shock recenti) e β (effetto leverage) siano statisticamente significativi nella serie storica finanziaria. Dall'altra parte, però, ha un limite molto grande: il modello non riesce a dare una stima corretta dell'andamento della volatilità e rischia sempre di sovrastimarla o sottostimarla.

BIBLIOGRAFIA

Options, Futures, and Other Derivatives, John C. Hull

Volatility clustering nelle serie storiche economiche e finanziarie, Elena Gasparini, Università Ca' Foscari Venezia

Modelli Arch, Giulia Palomba, Università Politecnica delle Marche

Modelli per la previsione delle serie storiche finanziarie, Steve Cavallin, Università degli Studi di Padova, Dipartimento di scienze economiche ed aziendali “M. Fanno”

Risk and Volatility: Econometric Models and Financial Practice, Robert Engle, The American Economic Review, Jun., 2004, Vol. 94, No. 3 (Jun., 2004), pp. 405- 420

Principles of Econometrics, Chap. 14, Time – Varying Volatility and ARCH Models, E. Griffiths

Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues. Quantitative Finance, 1, 223–236, Rama Cont (2001)

Characterization of Financial Time Series, Sewell Martin, (2011), Research Note RN/11/01
UCL DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE

A Transaction Data Study Of Weekly And Intradaily Patterns In Stock, Harris L., (1986)

A Monthly Effect in Stock Returns, Ariel Robert, (1987)

Dispense di econometria, Paolo Chirico, Università del Piemonte Orientale “A. Avogadro”

Analisi delle serie storiche: modelli ARCH e GARCH, Università degli studi Mediterranea, M. Ferrara

SITOGRAFIA

ftinvestment.it/La-volatilità-storica-Vs-la-Volatilità-implicita.pdf

<https://tassidicambio.bancaditalia.it/terzevalute-wf-ui-web/timeSeries>

<https://it.finance.yahoo.com/valute/>